

解答例

問1 (1) は (2) を解いてから代入したほうが早い.

(2) 直線 ℓ 上の点は

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-8} = t, \quad \text{を变形して} \quad (4t, -t, -8t)$$

とおける. 垂線の足 H は直線 ℓ 上の点であり $\overrightarrow{XH} \perp \vec{\ell} = 0$ (ここで, $\vec{\ell}$ は直線 ℓ の方向ベクトル) なので

$$\begin{bmatrix} 4t - a \\ -t - b \\ -8t - c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{計算して} \quad t = \frac{4a - b - 8c}{81}.$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{4a - b - 8c}{81} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 16 & -4 & -32 \\ -4 & 1 & 8 \\ -32 & 8 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

下線を引いた行列が P である.

実は

$$P = \frac{1}{\|\vec{\ell}\|^2} \vec{\ell} {}^t\vec{\ell} = \frac{1}{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

であり、(3) $\text{rank } P = 1$.

線形代数学第二で学ぶ

$m \times n$ 行列 A の定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ とする

$$\text{rank } A = \dim \text{Im } f_A$$

本問では, P は直線 (1次元部分空間) への正射影の行列なので, $\text{rank } P = 1$.

問2 (1) は (2) を解いてから代入したほうが早い.

(2) 平面 π の法線ベクトル ($\mathbf{v}$ とする) が ${}^t[2, 3, -1]$. 点 X を通る平面 π の法線

$$\overrightarrow{OX} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a + 2t \\ b + 3t \\ c - t \end{bmatrix}$$

と平面 π の交点は

$$2(a + 2t) + 3(b + 3t) - (c - t) = 0 \quad \text{を解いて} \quad t = \frac{-2a - 3b + c}{14}.$$

よって

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \frac{-2a - 3b + c}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 10a - 6b + 2c \\ -6a + 5b + 3c \\ 2a + 3b + 13c \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

下線を引いた行列が Q である.

実は, 法線への正射影 P を先に求めて $Q = E - P$ とするのが早い.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} {}^t\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ Q &= E - P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である. (3) $\text{rank } P = 1, \text{rank } Q = 2$.

下記の関係式 (正射影の性質、2方向への正射影分割 に関する法則) にも注意

$${}^tP = P, \quad {}^tQ = Q, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ = QP = O.$$

問2 (別解) 正射影の公式を使う方法

【正射影の公式】 V を内積を備えた線形空間. W を V の r 次元線形部分空間とする. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ が W の正規直交基底のとき, $\mathbf{v} (\in V)$ の W への正射影 $\mathbf{w}$ は

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r$$

正射影の行列表示 (P とする) としては

$$P = \mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2^t \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_r^t \mathbf{u}_r$$

説明: ${}^t \mathbf{a} \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (標準内積) に注意すると

$$\begin{aligned} P\mathbf{v} &= \mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_1 \mathbf{v} + \mathbf{u}_2^t \mathbf{u}_2 \mathbf{v} + \dots + \mathbf{u}_r^t \mathbf{u}_r \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_1 \mathbf{v} + \mathbf{u}_2^t \mathbf{u}_2 \mathbf{v} + \dots + \mathbf{u}_r^t \mathbf{u}_r \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{v})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{u}_r, \mathbf{v})\mathbf{u}_r \end{aligned}$$

(2) 平面 $\pi : 2x + 3y - z = 0$ の基底 (例として $\mathcal{A}$) から、正規直交基底 $\mathcal{U}$ を構成する.

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \mathcal{U} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

これ (特に2本目のベクトル) を求めるには、外積 (ベクトル積) か グラム・シュミットの正規直交化 が早い.

正射影の公式から

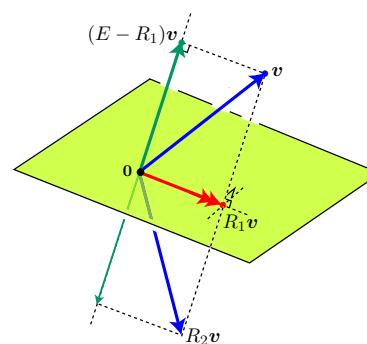
$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{5}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 2] + \frac{1}{\sqrt{70}^2} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} [6 \ 5 \ -3] \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 6 & 30 & -18 \\ 30 & 25 & -15 \\ -18 & -15 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 30 & 25 & -15 \\ 10 & -15 & 45 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

問3 (i) 問2 (2) の行列 Q に同じ.

(ii) 正射影 R_1 と反転 R_2 の関係を式にする (下図を参照):

$$R_1 \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + R_2 \mathbf{v}) \quad \text{あるいは} \quad R_2 = R_1 - (E - R_1).$$

$$R_2 = 2R_1 - E = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$



反転は2回繰り返すと元に戻る.
 $R_2^2 = E$

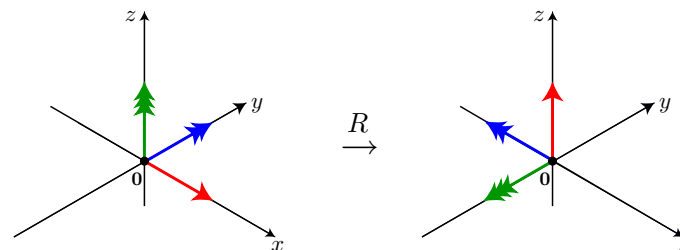
問4 (i) 解法は 問2 (2) の行列 Q と同じ.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ii) $R = (Re_1, Re_2, Re_3)$: 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の像を並べた行列が R .
答えを先に書くと

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

下図を参照. 3回繰り返すと元に戻る: $R^3 = E$.



以上