

基本行列 練習問題 (by 山田)

行列 A を次の通りとする.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

A を簡約化する行変形と基本行列について、以下の問いに答えよ. 基本行列は3種類ある. 記号を次の例のようにする (p.43)

$$P_2(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{13}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[0] A を (好きな方法で) 簡約化して A の階数 $\text{rank } A$ を求めよ.

[1] A の (標準的な) 簡約化の第1段階は次の通り:

(1-1) A の第2行から第1行の2倍を引く ((2,1)成分が2のため)

(1-2) A の第3行から第1行の5倍を引く ((3,1)成分が5のため)

下記の例文を完成し, 操作の結果を確認せよ.

(1-1) は A に「基本行列 $\boxed{} (= P_1)$ を 右 or 左 からかける」に対応する.

(1-2) は さらに「基本行列 $\boxed{} (= P_2)$ を 右 or 左 からかける」に対応する.

ここまでの結果は $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix}$. $A_1 = P_2 P_1 A$. 1列目が完成.

[1] P_1 と P_2 は交換可能であること ($P_1 P_2 = P_2 P_1$) を確認せよ.

[2] A の (標準的な) 簡約化の第2段階は次の通り:

(2) A_1 の第2行を $-\frac{1}{2}$ 倍する ((2,2)成分が-2のため)

下記の例文を完成し, 操作の結果を確認せよ.

(2) は「 A_1 に基本行列 $\boxed{} (= P_3)$ を左からかける」に対応する.

ここまでの結果は $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix}$.

[2-1] $A_2 = P_3 A_1$. $A_2 = \boxed{} A$.

[2-2] P_3 と P_1 は交換不可能であること ($P_3 P_1 \neq P_1 P_3$) を確認せよ.

[2-2] P_3 と P_2 は交換可能であること ($P_3 P_2 = P_2 P_3$) を確認せよ.

[3] A の (標準的な) 簡約化の第3段階は次の通り:

(3) A_2 の第3行に第2行の3倍を足す ((3,2)成分が-3のため)

下記の例文を完成し, 操作の結果を確認せよ.

(3) は「 A_2 に基本行列 $\boxed{} (= P_4)$ を左からかける」に対応する.

ここまでの結果は $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

[3] $A_3 = P_4 A_2$. $A_3 = \boxed{} A$.

[4] A の (標準的な) 簡約化の第4段階以降は次の通り:

(4) A_3 の第3行を $\frac{1}{5}$ 倍する ((3,3)成分が5のため)

(5) その結果に, 第1行に第3行を, 第2行に第3行の2倍を足す

((1,3)成分が-1, (2,3)成分が-2のため)

(6) その結果に, 第1行に第2行の-2倍を足す ((1,2)成分が2のため)

下記の例文を完成し, 操作の結果を確認せよ.

これらの操作は, それぞれ基本行列を順に左からかけていくことに対応する.

(4) $\boxed{} (= P_5)$, (5) $\boxed{}, \boxed{} (= P_7, P_6)$, (6) $\boxed{} (= P_8)$.

以上で簡約化が完成する. $E = P_8 P_7 P_6 P_5 A_3 = P_8 P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 A$.

[7] 各問に答えよ.

(7-1) $P = P_8 P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$ を求めよ.

(7-2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ. (簡約化の過程から $E = P A$.)

(7-3) $P = P_8 P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$ の逆行列 P^{-1} を求めよ.

$$P^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1} P_5^{-1} P_6^{-1} P_7^{-1} P_8^{-1}$$

(8-1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(8-2) P の行列式 $|P|$ を求めよ.

$$|P| = \prod_{i=1}^8 |P_i| = |P_8| |P_7| |P_6| |P_5| |P_4| |P_3| |P_2| |P_1|$$

(9-1) A の転置行列 ${}^t A$, その逆行列 $({}^t A)^{-1}$, および行列式 $|{}^t A|$ を求めよ.

(9-2) P の転置行列 ${}^t P$ とその行列式 $|{}^t P|$ を求めよ.

$${}^t P = {}^t (P_8 P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1) = {}^t P_1 {}^t P_2 {}^t P_3 {}^t P_4 {}^t P_5 {}^t P_6 {}^t P_7 {}^t P_8$$

(10) 3×6 行列 $[A \ E]$ に, 左から P をかけたもの $P[A \ E]$ を計算せよ.

以上