解答例

$\boxed{0}$ $A \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&2\\5&7&6\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-2&4\\0&-3&11\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-2\\0&-3&11\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = E. \qquad \mathrm{rank}\, A = 3.$

$\boxed{1}$ (1-1) $P_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, (1-2) $P_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}$. いずれも $\boxed{\text{左}}$ からかける.

基本行変形 は, 基本行列の 左 からの積に対応する.

［1］$P_1P_2 = P_2P_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}$. ［2-3］$P_3P_2 = P_2P_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\-5&0&1\end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ $P_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, ［2-1］$A_2 = P_3P_2P_1A$.

［2-2］$P_3P_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix} = P_1P_3.$

$\boxed{3}$ $P_4 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$, ［3］$A_3 = P_4P_3P_2P_1A$.

$P_1 = P_{21}(-2),\quad P_2 = P_{31}(-5),\quad P_3 = P_2(-\frac{1}{2}),\quad P_4 = P_{32}(3),$
$P_5 = P_3(\frac{1}{5}),\quad P_6 = P_{13}(1),\quad P_7 = P_{23}(2),\quad P_8 = P_{12}(-2).$

$\boxed{4}$ $P_5 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$, $P_6 = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_7 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_8 = \begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$A_5 = \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $A_6 = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $A_7 = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $A_8 = E$.

$\boxed{7}$ (7-1) $P = P_8P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1$

$= \begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&19&-6\\2&-11&4\\-4&-3&2\end{bmatrix} = A^{-1}.$ (7-2)

(7-3) $P^{-1} = {P_1}^{-1}{P_2}^{-1}{P_3}^{-1}{P_4}^{-1}{P_5}^{-1}{P_6}^{-1}{P_7}^{-1}{P_8}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{bmatrix}$

$\cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&2\\5&7&6\end{bmatrix} = A.$

公式 (p.46) ： $P_i(c)^{-1} = P_i(\frac{1}{c}),\quad {P_{ij}}^{-1} = P_{ij},\quad P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c).$

(8-1) $|A| = -10.$ (8-2) $|P| = |P_8||P_7||P_6||P_5||P_4||P_3||P_2||P_1|$

$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{5}\cdot 1\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{10}.$

(9-1) ${}^tA = \begin{bmatrix}1&2&5\\2&2&7\\-1&2&6\end{bmatrix}$, $({}^tA)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&2&-4\\19&-11&-3\\-6&4&2\end{bmatrix} = {}^t(A^{-1}).$

$|{}^tA| = |A| = -10.$

(9-2) ${}^tP = {}^tP_1{}^tP_2{}^tP_3{}^tP_4{}^tP_5{}^tP_6{}^tP_7{}^tP_8$

$= \begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$

$\cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&2&-4\\19&-11&-3\\-6&4&2\end{bmatrix} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$

公式 (p.76) ： ${}^tP_i(c) = P_i(c),\quad {}^tP_{ij} = P_{ij},\quad {}^tP_{ij}(c) = P_{ji}(-c).$

$$
\begin{aligned}
|{}^tP| &= |{}^tP_1{}^tP_2{}^tP_3{}^tP_4{}^tP_5{}^tP_6{}^tP_7{}^tP_8| \\
&= |{}^tP_1||{}^tP_2||{}^tP_3||{}^tP_4||{}^tP_5||{}^tP_6||{}^tP_7||{}^tP_8| \\
&= |P_1||P_2||P_3||P_4||P_5||P_6||P_7||P_8| \\
&= |P_8||P_7||P_6||P_5||P_4||P_3||P_2||P_1| \qquad \text{（実数の 交換法則）} \\
&= |P_8P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1| \\
&= |P|
\end{aligned}
$$

(10) $P\begin{bmatrix}A & E\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}PA & PE\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & A^{-1}\end{bmatrix}$.

最後に，A^{-1} を求めておく

$$
\begin{bmatrix}A & E\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 11 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & P_2P_1\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -3 & 11 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_2 & P_3P_2P_1\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 5 & -2 & -\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_3 & P_4P_3P_2P_1\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{19}{10} & -\frac{3}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & P_8P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & A^{-1}\end{bmatrix}.
$$

$$
A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & 19 & -6\\ 2 & -11 & 4\\ -4 & -3 & 2\end{bmatrix}.
$$

以上