余因子・余因子行列　練習問題 (by 山田)

行列 A, B, C および M, N を次の通りとする.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & a & b & c \end{bmatrix}.$$

1 行列 $X = B, C, M, N$ それぞれについて, 逆行列 X^{-1} を求めよ.

2 行列 $X = B, C, M, N$ それぞれについて, 各 (i, j) 成分に関する小行列式 $|X_{ij}|$ を求めよ.

例：A に対しては $\begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

3 行列 $X = B, C, M, N$ それぞれについて, 各 (i, j) 成分に関する余因子 $(-1)^{i+j}|X_{ij}|$ を求めよ.

例：A に対しては $\begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$.

4 行列 $X = B, C, M, N$ それぞれについて, 余因子行列 $\widetilde{X}$ を求めよ.
(個人的には、名称を「余因子転置行列」と呼んで「転置」を強調したい)

例：A に対しては　前問 の転置行列が $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

以上