行列式 練習問題　解答例 （by 山田）

$\boxed{1}$ (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c^2+ca-b^2-ba)$

$= (b-a)(c-a)\{(c-b)(c+b)+(c-b)a\} = \underline{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$

(2) $\underline{(a+2)(a-1)^2}$　（$\boxed{3}$(2) を参照）

(3) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a-x & 0 \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = (x-a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = (x-a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-b & b-x \\ 0 & a+b & x \end{vmatrix}$

$= (x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a+b & x \end{vmatrix} = \underline{(x-a)(x-b)(x+a+b)}$

(5) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & c-b \\ 0 & b-c & a-c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\{(a-b)(a-c)+(b-c)^2\} = \underline{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$

$\boxed{2}$ (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b+a & c+a & d+a \\ 0 & b^3+b^2a+ba^2+a^3 & c^3+c^2a+ca^2+a^3 & d^3+d^2a+da^2+d^3 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^3+b^2a+ba^2+a^3 & c^3+c^2a+ca^2+a^3 & d^3+d^2a+da^2+d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & A_{(3,2)} & A_{(3,3)} \end{vmatrix}$

$= (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab & a^2+b^2+d^2+bd+da+ab \end{vmatrix}$

$= (c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

$$\begin{aligned} A_{(3,2)} &= (c^3-b^3)+(c^2-b^2)a+(c-b)a^2 = (c-b)\{(c^2+cb+b^2)+(c+b)a+a^2\} \\ &= (c-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab) \\ A_{(3,3)} &= (d-b)(a^2+b^2+d^2+bd+da+ab) \end{aligned}$$

以上から $= \underline{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)}$

(2) $\underline{(a+3)(a-1)^3}$　（$\boxed{3}$(2) を参照），(3) $\underline{(x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c)}$　（$\boxed{3}$(3) を参照）

(4) $a' = a-1, b' = b-1, c' = c-1$ とする．

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a' & a' & a' \\ 0 & a' & b' & b' \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = a'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & b' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = a'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b'-a' & b'-a' \\ 0 & b'-a' & c'-a' \end{vmatrix} = a'(b'-a')(c'-b')$

$= \underline{(a-1)(b-a)(c-b)}$

(5) $\underline{(a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(a-c)^2+(b-d)^2\}}$　（後述「巡回行列」を参照）

$\boxed{3}$ $n\times n$ 行列.

(2) 各列の成分の和がどれも $a+n-1$ なので「第 1 行に第 2 行以下のすべての行を足して, そこから $a+n-1$ を外に出す」そして「第 2 行以下の各行から第 1 行を引く」

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a' \end{vmatrix}$$

$= \underline{(a+n-1)(a-1)^{n-1}}$　　注：省スペースのため $a-1=a'$ とした.

(3) 帰納的に「注目する部分の 1 行目から 2 行目を引き, $(x-a_i)$ を外に出し, 1 列目を整理」

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = (x-a_1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_2+a_1 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_2+a_1 & a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & a_{n-1} \\ 0 & a_2+a_1 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & x & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = (x-a_1)\begin{vmatrix} x-a_2 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1 & x & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)(x-a_2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1 & x & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & a_{n-1} \\ a_2+a_1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = (x-a_1)(x-a_2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & x+a_2+a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_3+a_2+a_1 & x & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & a_3+a_2+a_1 & a_4 & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-2})\begin{vmatrix} x+a_{n-2}+\cdots+a_1 & a_{n-1} \\ a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \underline{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})(x+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$$

$\boxed{\text{補}}$ 巡回行列（固有値・対角化、複素数を利用する方法）

$$A \;=\; \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

巡回の “王様” 1 の n 乗根（n 個ある：$\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}$）を利用

$$\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i \cdot k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

各 ζ に対して，次のベクトルが固有値 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\zeta^j = a_0 + a_{n-1}\zeta + a_{n-2}\zeta^2 + \cdots + a_1\zeta^{n-1}$ に対する固有ベクトルになる．

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{bmatrix} \;=\; (a_0 + a_{n-1}\zeta + a_{n-2}\zeta^2 + \cdots + a_1\zeta^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{bmatrix}$$

よって，行列式は それら n 個の固有値の積

$$|A| \;=\; \prod_{\zeta : \zeta^n = 1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\zeta^j \right)$$

- $\boxed{1}$(5) $n=3$ のとき，1 の 3 乗根は $1, \omega, \overline{\omega}$ （$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\omega\overline{\omega} = 1, \omega + \overline{\omega} = -1$）

$$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega)(a+b\overline{\omega}+c\omega)$$

- $\boxed{2}$(5) $n=4$ のとき，1 の 4 乗根は $1, i, -1, -i$ （$i^2 = -1$）

$$(a+b+c+d)(a+bi-c-di)(a-b+c-d)(a-bi-c+di)$$