行列式 練習問題 (by 山田)

式の対称性などを楽しんでください.

$\boxed{1}$ まず 3×3 行列.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$

$\boxed{2}$ 4×4 行列.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

$\boxed{3}$ $n \times n$ 行列.

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$

$\boxed{補}$ 巡回行列（固有値・対角化、複素数を利用する方法） 解答例を参照

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = a_{j-i \mod n}$$

1 の n 乗根（n 個ある：$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$）$\zeta$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\zeta^j = a_0 + a_{n-1}\zeta + a_{n-2}\zeta^2 + \cdots + a_1\zeta^{n-1}$$

が固有値になる．行列式は，それら n 個の固有値の積.

$$|A| = \prod_{\zeta:\zeta^n=1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\zeta^j \right)$$