

# 置換群 練習問題 (by 山田)

こういう数学もあります

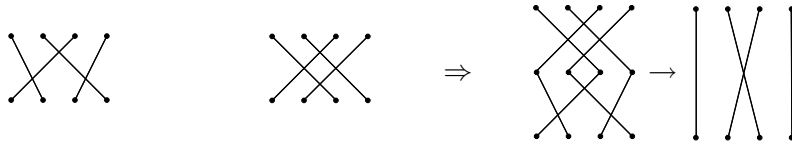
$n$  次の置換群  $S_n$  と、その演算「積」を次のように定義する：

$$S_n = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} (j_1 j_2 \cdots j_n) \text{ は} \\ \{1, 2, \dots, n\} \text{ の順列} \end{array} \right\} / \begin{array}{l} \text{列を交換しても} \\ \text{同じ } (\sim) \text{ と見なす} \end{array}$$

$\sigma, \tau \in S_n$  のとき、積  $\sigma\tau$  が次の例のように定義される：

“ $\tau$  の下に  $\sigma$  をつなぐ” ことに注意.  $\sigma\tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(4) = 3$  という計算もできる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$



単位元  $1 \in S_n$ , 逆元 ( $\sigma$  に対して  $\sigma^{-1}$ ) については別途, 資料を参照のこと.

$S_n$  で 1 から  $n$  までの順列の集合を表すとする. また,  $F_n$  で  $\{1, 2, \dots, n\}$  からそれ自身への全単射の集合を表すとする. このとき  $S_n, S_n, F_n$  の 3 者の間には明らかな 1 : 1 対応がある.

$$\text{例: } (n=3) \quad 321 \in S_3 \Leftrightarrow \begin{array}{l} j_1 = 3 \\ j_2 = 2 \\ j_3 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(2) = 2 \ (\sigma \in F_3) \\ \sigma(3) = 1 \end{array}.$$

**表記法：**動く数字だけを書き, 動かない数字を省略する.

例:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  の代わりに  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  と表す.

**軌道：** $n$  次の置換に対して  $\{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \sigma^3(i), \dots\}$  を  $i$  の  $\sigma$  による軌道という ( $1 \leq i \leq n$ ).

**巡回置換：** $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  は, 動く数字だけを書く表記法の下で 次の置換を表す.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 \end{pmatrix} \text{ 言わば } i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{r-1} \rightarrow i_r \rightarrow i_1.$$

ただし  $i_k = \sigma^{k-1}(i_1) \neq i_1$  ( $1 < k \leq r$ ).

長さ 2 の巡回置換「 $i \leftrightarrow j$ 」を**互換**, 隣り合う数の互換「 $i \leftrightarrow i+1$ 」を**隣接互換**という.

巡回置換の逆元は, 逆順にすればよい:  $(i_1, i_2, \dots, i_r)^{-1} = (i_r, \dots, i_2, i_1)$

## 定理

(A) 任意の置換  $\sigma \in S_n$  は互換の積で表せる.

(B) その積の個数の偶奇は積の取り方によらない.

**位数：**任意の  $n$  次の置換  $\sigma \in S_n$  は, 最大でも  $n!$  乗すれば単位元 1 になる.  $\sigma$  の累乗  $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots$  で  $\sigma^k = 1$  となる最小の自然数  $k$  を  $\sigma$  の**位数**という.

例: 長さ  $r$  の巡回置換の位数は  $r$ . 互換の位数は 2.

**偶置換・奇置換**：任意の置換  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  は互換の積で表せる．その積の個数の偶奇は積の取り方によらない．偶数（奇数）個の互換の積で表される置換を偶置換（奇置換）という．積と偶奇の関係は，偶・偶＝偶，偶・奇＝奇，奇・偶＝奇，奇・奇＝偶．  
また，偶置換の逆元は偶置換．奇置換の逆元は奇置換．  
 $n$  次の置換群のうちで 偶置換の個数 と 奇置換の個数 は等しく  $n!/2$  個．

**符号・準同型**：置換  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  の符号  $\text{sgn}(\sigma)$  を

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ が 偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ が 奇置換} \end{cases}$$

と定める．これを置換群  $\mathcal{S}_n$  から  $\{\pm 1\}$  への写像 ( $\text{sgn} : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ ) とみなす．この写像は「積を保つ」，つまり

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$$

一般に（群から群への）この性質をもつ写像を準同型という．

準同型は，単位元を単位元に写す ( $\text{sgn}(1) = +1$ ) ．

逆元の像は像の逆元に一致する ( $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ ) ．

**共役**： $n$  次の置換  $\sigma, \tau, \omega \in \mathcal{S}_n$  の間に  $\omega = \tau^{-1}\sigma\tau$  の関係があるとき， $\omega$  は「 $\sigma$  の  $\tau$  による共役」という（逆の流儀もある： $\sigma$  が  $\omega$  の  $\tau$  による共役 ( $\tau^{-1}\omega\tau = \sigma$ )）．「 $\omega$  と  $\sigma$  は共役」と  $\tau$  に言及しない言い方もする．

共役な置換は 位数が等しい．偶奇も等しい．巡回置換に分解したとき 長さの配分が一致する．

**交換子**： $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$  を「 $\sigma$  と  $\tau$  の交換子」という． $\sigma\tau = \tau\sigma$  と  $[\sigma, \tau] = 1$  は同値．交換子は偶置換となる．

定理 (B) の説明の 1 つ：互いに異なる実数  $n$  個の列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_i = i$  でよい) を考え，次の値「差積（異なる項の差の積）： $A$ 」の符号とその変化を考える

$$\begin{aligned} A = \prod_{i < j} (a_j - a_i) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \cdots (a_{n-1} - a_1)(a_n - a_1) \neq 0. \\ &\quad \cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_{n-1} - a_2)(a_n - a_2) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) \\ &\quad \cdot (a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

$n$  次の置換  $\sigma \in \mathcal{F}_n$  に対して，数列を  $\sigma$  で並び替えた  $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}$  の差積を  $A(\sigma)$  とする：

$$A(\sigma) = \prod_{i < j} (a_{\sigma(j)} - a_{\sigma(i)}).$$

絶対値は変わらない： $|A(\sigma)| = |A|$ ．並び替えで大小が交代した組の数の偶奇に応じて符号が変わる．その符号を  $\text{sgn}(\sigma) = \frac{A(\sigma)}{A} \in \{\pm 1\}$  とする．

互換  $(I, J)$  ( $1 \leq I < J \leq n$ ) の場合、並び替えで大小が交代する組の添字は

$\{I, k\}$  ( $I < k < J$ ),  $\{I, J\}$ ,  $\{k, J\}$  ( $I < k < J$ ) の  $2(J - I) - 1$  個 (奇数個) .

$\sigma\tau$  による並び替えは、並び替えの合成「 $a_1, a_2, \dots, a_n$  の  $\tau$  による並び替え  $a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \dots, a_{\tau(n)}$  (これを実数列  $a'_1, \dots, a'_n$  とみなす) の  $\sigma$  による並び替え」とも見なすことができ

$$\frac{A(\sigma\tau)}{A} = \frac{A(\sigma\tau)}{A(\tau)} \frac{A(\tau)}{A} = \frac{A'(\sigma)}{A'} \frac{A(\tau)}{A} \quad \text{つまり} \quad \text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau).$$

ここで、 $A'$  は実数列  $a'_1, \dots, a'_n$  の左積.

## 練習問題

1 [基礎の確認] 6 次の置換  $\sigma, \tau$  を次の通りとする.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$$

- (1)  $\sigma\tau, \tau\sigma$  および  $\sigma^{-1}, \tau^{-1}$  を求めよ.
- (2)  $(\sigma\tau)^{-1}, (\tau\sigma)^{-1}, \sigma^{-1}\tau^{-1}, \tau^{-1}\sigma^{-1}$  および  $\tau^{-1}\sigma\tau$  をそれぞれ求めよ.

以下では、 $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$  および  $\sigma^{-1}, \tau^{-1}\sigma\tau$  の 7 つそれぞれについて、

- (3)  $1 \in \mathcal{S}_6$  になるまで累乗せよ.
- (4) 位数を答えよ.
- (5) 1 の軌道を調べよ.
- (6) 軌道が交わらない巡回置換の積に分解せよ.
- (7) 偶置換か奇置換か判定せよ.

2 [論理の確認] 下記を証明せよ.

- (a1) 任意の置換  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  は巡回置換の積で表せる.
- (a2) 長さ  $r$  の任意の巡回置換  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  は  $r - 1$  個の互換の積で表せる.
- (a3) 互換  $(I, J) \in \mathcal{S}_n$  は隣接互換の積で表せる.
- (A) 任意の置換  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  は互換 (さらには隣接互換) の積で表せる.
- (B) その積の個数の偶奇は、積の取り方によらない.
- (1) 積と偶奇の関係は、偶・偶 = 偶, 偶・奇 = 奇, 奇・偶 = 奇, 奇・奇 = 偶.
- (2) 偶置換の逆元は偶置換. 奇置換の逆元は奇置換.
- (3)  $n$  次の偶置換, 奇置換の個数は等しい.
- (4) 任意の  $n$  次の置換  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  は、最大でも  $n!$  乗すれば単位元 1 になる.

3 [共役など] 前々問 1 の具体例で確認せよ.

- (1)  $\tau\sigma$  は  $\sigma\tau$  と共役.  $\tau^{-1}$  による共役.
- (2) 共役な元の位数は等しい.
- (3)  $\sigma$  を巡回置換  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  とするとき、 $\sigma$  の  $\tau$  による共役  $\tau^{-1}\sigma\tau$  は巡回置換  $(\tau^{-1}(i_1), \tau^{-1}(i_2), \dots, \tau^{-1}(i_r))$ .
- (4)  $[\tau, \sigma] = [\sigma, \tau]^{-1}$ .
- (5)  $[\tau^{-1}\omega\tau, \tau^{-1}\sigma\tau] = \tau^{-1}[\omega, \sigma]\tau$ .