

一般の線形空間の例（多項式のなす線形空間）

練習問題（by 山田）

問 6次以下の多項式のなす線形空間を $\mathbb{R}[x]_6$ と表す.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[x]_6 &= \{a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid \text{各 } a_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1 \rangle\end{aligned}$$

$\mathbb{R}[x]_6$ は 7次元 ($\dim \mathbb{R}[x]_6 = 7$) で, $(x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1)$ は基底となる.

・値 $a \in \mathbb{R}$ に対し, $V(a) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(a) = 0\}$ は

a を代入すると 0 になる 6次以下の多項式 のなす集合

であり, $\mathbb{R}[x]_6$ の部分空間である.

1 次のそれぞれの部分空間について, 次元と 基底の 1 組を求めよ.

(1) $V(1) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(1) = 0\}$, および

$V(-1) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(-1) = 0\}$

(2) 共通部分

$$V(1) \cap V(-1) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(1) = 0, p(-1) = 0\}$$

(3) $S = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(-x) = -p(x)\}$

(4) $T = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_6 \mid p(2-x) = p(x)\}$

(5) 共通部分: $S \cap V(1)$, $S \cap V(-1)$, および $S \cap V(1) \cap V(-1)$

(6) 共通部分: $T \cap V(1)$, $T \cap V(-1)$, および $T \cap V(1) \cap V(-1)$

解答例 注：基底の取り方はいろいろあり，1 つには決まらない。

(1) $\dim V(1) = 6$.

基底： $((x^6 - 1), (x^5 - 1), (x^4 - 1), (x^3 - 1), (x^2 - 1), (x - 1))$ あるいは
 $(x^5(x - 1), x^4(x - 1), x^3(x - 1), x^2(x - 1), x(x - 1), (x - 1))$ など.

$\dim V(-1) = 6$.

基底： $(x^5(x + 1), x^4(x + 1), x^3(x + 1), x^2(x + 1), x(x + 1), (x + 1))$.

(2) $\dim V(1) \cap V(-1) = 5$.

「1 と -1, どちらを代入しても 0 になる多項式」 $\Leftrightarrow (x^2 - 1)$ で割り切れる.

基底： $(x^4(x^2 - 1), x^3(x^2 - 1), x^2(x^2 - 1), x(x^2 - 1), (x^2 - 1))$.

(3) $p(-x) = -p(x) \Leftrightarrow$ 奇関数.

$\dim S = 3$. 基底： (x^5, x^3, x)

(4) $p(2 - x) = p(x) \Leftrightarrow x = 1$ に関して対称. $x(2 - x)$ とか $(x - 1)^2$ が典型

$\dim T = 4$. 基底： $(x^3(2 - x)^3, x^2(2 - x)^2, x(2 - x), 1)$ あるいは
 $((x - 1)^6, (x - 1)^4, (x - 1)^2, 1)$ など.

(5) 実は 3 者は同一の部分空間 (S_1 とする) :

$S \cap V(1) = S \cap V(-1) = S \cap V(1) \cap V(-1) = S_1$.

理由：奇関数で「 $x = 1$ で 0」なら， $x = -1$ でも 0. $(x^2 - 1)$ で割り切れる.

$\dim S_1 = 2$. 基底： $(x^5 - x^3, x^3 - x)$ つまり $(x^3(x^2 - 1), x(x^2 - 1))$.

あるいは $(x^5 - x, x^3 - x)$.

(6) $\dim T \cap V(1) = 3$.

基底： $(x^2(2 - x)^2(x - 1)^2, x(2 - x)(x - 1)^2, (x - 1)^2)$.

$\dim T \cap V(-1) = 3$.

基底： $((x + 1)(x - 3)x^2(2 - x)^2, (x + 1)(x - 3)x(2 - x), (x + 1)(x - 3))$

注： $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3 = -x(2 - x) - 3$.

$\dim T \cap V(1) \cap V(-1) = 2$.

基底： $((x + 1)(x - 3)x(2 - x)(x - 1)^2, (x + 1)(x - 3)(x - 1)^2)$

以上