

一般の線形空間の例（行列のなす線形空間）

練習問題（by 山田）

問 3次正方行列のなす線形空間を $M_3(\mathbb{R})$ と表す.

$$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \middle| \text{各 } a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = \langle \{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3} \rangle$$

ただし E_{ij} は「 (i, j) 成分のみ 1 でそれ以外 0」の 3 次正方行列（次頁）.
 $M_3(\mathbb{R})$ は 9 次元（ $\dim M_3(\mathbb{R}) = 9$ ）で、 $(\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3})$ は基底となる.

1 (1) 次のそれぞれの部分空間について、次元と基底の 1 組を求めよ.

対称行列のなす部分空間 $S_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$,

交代行列のなす部分空間 $T_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\}$

(2) 与えられた 3 次正方行列 A に対して、 A と可換な行列のなす部分空間を $C(A)$ と表す（「 A の中心化群」という）

$$C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}.$$

下のそれぞれの行列 A に対して、 $C(A)$ の次元と基底の 1 組を求めよ.

$$(i) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (ii) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (iii) A = E,$$

$$(iv) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (v) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (vi) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(vii) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (viii) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (ix) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(x) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (xi) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (xii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(xiii) A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

(3) (2) の各行列 A に対する $C(A)$ のうち、

S_3 との共通部分 $C(A) \cap S_3$ の次元 $\dim(C(A) \cap S_3)$, および

T_3 との共通部分 $C(A) \cap T_3$ の次元 $\dim(C(A) \cap T_3)$

をそれぞれ求めよ.

9次元の線形空間 $M_3(\mathbb{R})$ の基底 $(\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3})$

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & E_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\dim M_3(\mathbb{R}) = 9.$$