

一般の線形空間の例（行列のなす線形空間）練習問題 by 山田

解答例 E は単位行列とする.

(1) $\dim S_3 = 6$.

$$\text{基底: } \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dim T_3 = 3. \quad \text{基底: } \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

(2) (i) を詳しく説明する.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ に対して, } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \text{ とすると,}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix},$$

$$XA = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & 0 & x_{11} \\ x_{23} & 0 & x_{21} \\ x_{33} & 0 & x_{31} \end{bmatrix}.$$

したがって $AX = XA$ の条件は

$$\begin{aligned} x_{31} = x_{13}, \quad x_{32} = 0, \quad x_{33} = x_{11}, & \quad x_{11} = x_{33}, \quad x_{13} = x_{31}, \\ x_{23} = 0, & \quad x_{21} = 0, \quad \text{整理して} \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} = 0, \\ x_{11} = x_{33}, \quad x_{12} = 0, \quad x_{31} = x_{13}. & \quad x_{23} = 0, \quad x_{32} = 0. \end{aligned}$$

そこで $x_{11} = x_{33} = a, x_{13} = x_{31} = b, x_{22} = c$ とおいて

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a, b, c \text{ は任意}$$

$$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

この A に対して $\dim C(A) = 3$. 基底として, $C(A)$ を生成する右上の 3 つ組.

あるいは $(E, E_{22}, A), (E, A, A^2)$.

$$(ii) \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

この A に対して $\dim C(A) = 3$. 基底として, $C(A)$ を生成する右上の 3 つ組.

あるいは (E, A, A^2) .

(iii) 単位行列 E は任意の行列の可換. よって $C(E) = M_3(\mathbb{R})$.

$$\dim C(E) = \dim M_3(\mathbb{R}) = 9$$

$$(iv) \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

つまり, この A に対して $C(A) = \{ \text{対角行列} \}$. $\dim C(A) = 3$.

$$(v) \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, k \in \mathbb{R} \right\} = \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33} \rangle$$

この A の場合, 次の分割 $((2+1) \times (2+1))$ を用いると良い.

$$A = \begin{bmatrix} 2E & \vec{0} \\ {}^t\vec{0} & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} Y & \vec{v} \\ {}^t\vec{w} & z \end{bmatrix}, \quad \text{ただし} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ {}^t\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix},$$

$AX = XA$ の条件は $2\vec{v} = -\vec{v}, 2\vec{w} = -\vec{w}$ ($\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}, \vec{w} = \vec{0}, Y$ と z は任意) となる.

この A に対して $\dim C(A) = 5$. 基底として, $C(A)$ を生成する上の 5 つ組.

・ここで指摘しておこう: 共役 $(P^{-1}AP)$ と中心化群 $C(A)$ の関係.

次が成り立つ. P は正則行列とする.

$B = P^{-1}AP$ のとき

$$C(B) = \{P^{-1}XP \mid X \in C(A)\} \quad (= P^{-1}C(A)P).$$

理由: $(P^{-1}XP)(P^{-1}YP) = P^{-1}XYP$

$$\begin{aligned} XY = YX & \Leftrightarrow P^{-1}XYP = P^{-1}YXP \\ & \Leftrightarrow (P^{-1}XP)(P^{-1}YP) = (P^{-1}YP)(P^{-1}XP). \end{aligned}$$

$$(vi) \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ a & c & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

この A に対して $\dim C(A) = 3$. 基底として, $C(A)$ を生成する右上の 3 つ組.
あるいは (E, A, A^2) .

$$(vii) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ とする. 次の (viii) でも使う.}$$

$$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

この A に対して $\dim C(F) = 3$. 基底として, $C(F)$ を生成する右上の 3 つ組.
あるいは (E, F, F^2) .

(viii) この A は $A = 2E + F$ と分解でき, $2E$ の部分は 任意の行列と可換なので $C(A) = C(F)$. 前問 (vii) と同じ解となる.

$$(ix) \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \\ = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

この A に対して $\dim C(A) = 5$. 基底として, $C(A)$ を生成する右上の 5 つ組.
あるいは $(E, E_{12}, E_{13}, E_{32}, E_{33})$.

(2)(x) 詳しく説明する.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ に対して, } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \text{ とすると,}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 3x_{21} & 3x_{22} & 3x_{23} \end{bmatrix},$$

$$XA = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} & 0 \\ 0 & x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} & 0 \\ 0 & x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって $AX = XA$ の条件は

$$\begin{aligned} x_{21} &= 0, & x_{22} &= x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13}, & x_{23} &= 0, \\ 2x_{21} &= 0, & 2x_{22} &= x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} & 2x_{23} &= 0, & \text{整理して, まず} & x_{21} &= 0, \\ 3x_{21} &= 0, & 3x_{22} &= x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33}, & 3x_{23} &= 0. & & & x_{23} &= 0 \end{aligned}$$

(2, 2) 成分は常に成り立つ式となり, (値を制限する) 条件ではなくなる. そして,

$$\begin{aligned} x_{22} &= x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} & \Rightarrow & & x_{11} &= x_{22} - 2x_{12} - 3x_{13} \\ 3x_{22} &= x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} & & & x_{31} &= 3x_{22} - 2x_{32} - 3x_{33} \end{aligned}$$

$$x_{22} = a, \quad x_{12} = b_1, \quad x_{13} = b_2, \quad x_{32} = c_1, \quad x_{33} = c_2 \quad \text{とにおいて}$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} a - 2b_1 - 3b_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a & 0 \\ 3a - 2c_1 - 3c_2 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b_1 - 3b_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a & 0 \\ 3a - 2c_1 - 3c_2 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} \middle| a, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle E, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

この A に対して $\dim C(A) = 5$. 基底として, $C(A)$ を生成する上の 5 つ組.

(xi) 本問の A は 前問の A の転置行列 (tA) である. 行列の転置に関する性質 ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ および ${}^t({}^tX) = X$ を利用できる. 次が成り立つ.

$$X \in C(A) \Leftrightarrow AX = XA \stackrel{\text{転置}}{\Leftrightarrow} {}^tX {}^tA = {}^tA {}^tX \Leftrightarrow {}^tX \in C({}^tA)$$

よって,

$$\begin{aligned} C(A) &= \{ {}^tX \mid X \in C({}^tA) \} \\ &= \left\langle E, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

・ここで指摘しておこう
ケーリー-ハミルトンの定理

$$A \text{ の固有多項式 } f_A(\lambda) = |\lambda E - A| \quad \text{に対して} \quad f_A(A) = O$$

つまり, 固有多項式を $f_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$
(最高次は n (行列のサイズ) で係数は 1 , $a_{n-1} = -\text{tr}A$, $a_0 = (-1)^n \det A$)
とすれば

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0E = O$$

により, A が n 次正方行列ならば, A^n およびそれ以上の累乗, さらに, 存在する場合には $A^{-m} (= (A^{-1})^m = (A^m)^{-1})$ も, $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ の 1 次結合で表せる. 例えば, 上の式から

$$\begin{aligned} A^n &= -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0E), \\ A^{n+1} &= -A(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0E) \\ &= -a_{n-1}A^n - (a_{n-2}A^{n-1} + \cdots + a_1A^2 + a_0A) \\ &= a_{n-1}(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0E), \\ &\quad -(a_{n-2}A^{n-1} + \cdots + a_1A^2 + a_0A) \\ A^{-1} &= -\frac{1}{a_0} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1E). \end{aligned}$$

特に,

$$\text{任意の整数 } k \text{ について } A^k \in \langle E, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$$

このとき $\langle E, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$ は n 次元以下.

当然, $E, A, A^2, \dots$ および それらの 1 次結合は A と可換.

$$\langle E, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle \subset C(A).$$

理論的な考察をしてみよう: 写像 $F: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ を

$$F(X) = AX - XA$$

と定めると, F は線形写像であり, $C(A) = \text{Ker } F$ である. $M_3(\mathbb{R})$ の基底を, 順序付き (辞書式順序) で

$$\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$$

とし, この基底に関する F の表現行列 (9 次正方行列) を求める.

$A = (a_{ij})$, $X = (x_{ij})$ に対して, 積 AX および XA の (i, j) 成分は

$$(AX)_{i,j} = \sum_k a_{ik}x_{kj}, \quad (XA)_{i,j} = \sum_k x_{ik}a_{kj}.$$

により

$$F(X)_{i,j} = (AX - XA)_{i,j} = \sum_k (a_{ik}x_{kj} - x_{ik}a_{kj})$$

$X = E_{IJ}$ とする ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). X の (i, j) 成分 x_{ij} を デルタ関数で表すと $x_{ij} = \delta_{iI}\delta_{jJ}$ なので

$$F(X)_{i,j} = \sum_k (a_{ik}\delta_{kI}\delta_{jJ} - \delta_{iI}\delta_{kJ}a_{kj}) = a_{iI}\delta_{jJ} - \delta_{iI}a_{Jj}$$

ここで, 「行列の分割」を利用して, 次のような記号 ($\otimes$: テンソル積) を導入する.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{であれば} \quad C \otimes A = \begin{bmatrix} c_{11}A & \cdots & c_{1n}A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}A & \cdots & c_{mn}A \end{bmatrix}$$

C が $m \times n$ 行列, A が $M \times N$ 行列なら, $C \otimes A$ は $mM \times nN$ 行列.

すると, 先の $F(X)_{i,j}$ の成分は, F の表現行列が

$$\begin{aligned}
A \otimes E - E \otimes {}^t A &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & -a_{32} & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{11} - a_{33} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & -a_{12} & 0 & -a_{32} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & -a_{13} & -a_{23} & a_{22} - a_{33} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} - a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & -a_{12} & a_{33} - a_{22} & -a_{32} \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

であること を表している.

求めたいのは $\text{Ker } F$ だったので, これ (F の表現行列) の零空間を求める. 行変形で簡約化すれば良い.

(xii) 上記の理論的計算を利用する.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ に対して,}$$

$$\begin{aligned}
A \otimes E - E \otimes {}^t A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (0 \text{ の行は省略した}) \text{ rank} = 4
\end{aligned}$$

解空間 ($\mathbb{R}^9$ の部分空間) は 5 次元で

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

となる。これは基底 ε に関する座標で考えたものなので、行列に戻して

$$\begin{aligned} C(A) &= \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, E \right\rangle \end{aligned}$$

$$\text{注: } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in C(A) \cap T_3 \subset C(A).$$

(xiii) これにも理論的計算を利用する.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix} \text{ に対して, } A \otimes E - E \otimes {}^t A \text{ を計算すると}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & 10 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 11 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 10 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & -10 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -11 & 0 & -8 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -11 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 132 & 167 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 71 & 89 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 & 22 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(0 の行は省略した. 分数の出る前で止めた.) rank = 6

解空間 ($\mathbb{R}^9$ の部分空間) は 3 次元で

$$\left\langle \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 16 \\ -10 \\ -12 \\ -9 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \\ -9 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

となる。これは基底 ε に関する座標で考えたものなので、行列に戻して

$$C(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 10 & 19 & 16 \\ -10 & -12 & -9 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{aligned} -4 \begin{bmatrix} 10 & 19 & 16 \\ -10 & -12 & -9 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 11 \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} - 6 \cdot 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 28 & 56 & 35 \\ 7 & 28 & 14 \\ -28 & -77 & -42 \end{bmatrix} \\ &= 7A, \\ -3 \begin{bmatrix} 10 & 19 & 16 \\ -10 & -12 & -9 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} - 6 \cdot 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 28 & 63 & 42 \\ 0 & 14 & 7 \\ -21 & -70 & -42 \end{bmatrix} \\ &= 7 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -10 & -6 \end{bmatrix} \\ &= 7A^2. \end{aligned}$$

により $C(A) = \langle E, A, A^2 \rangle$.

(3)

No.	A	$C(A)$	$\dim C(A)$	$\dim C(A) \cap T_3$	$\dim C(A) \cap S_3$
(i)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$	3	3	0
(ii)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{bmatrix}$	3	2	1
(iii)	E	$M_3(\mathbb{R})$	9	6	3
(iv)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$	3	3	0
(v)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$	5	3	1
(vi)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & a & 0 \\ a & c & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$	3	3	0
(vii)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$	3	1	0
(viii)	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$	3	1	0
(ix)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$	5	2	0
(x)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	略	5	1	0
(xi)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	略	5	1	0
(xii)	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	略	5	2	0
(xiii)	$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix}$	$\langle E, A, A^2 \rangle$	3	1	0

以上