

連立方程式の解の様子 (by 山田)

次の“左辺が共通の” 3つの連立方程式 を比べてみる.

非同次	非同次	同次化
(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \end{cases}$	(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = -6 \\ 3x + 4y + 5z = -9 \end{cases}$	(0) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

行列とベクトルを使って $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の形で表わすと, それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解はそれぞれ次のようになる.

$$(1a) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2a) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (0a) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(t は実数) (t は実数) (t は実数)

下線の部分が共通になる. ここでは, このように解がたくさんある連立方程式の「解の様子」について考察する.

もともと「連立方程式 (1) の解が (1a) である」とは,

「方程式 (1) をみたす 3つの数 x, y, z は (1a) のように表示できるし, 逆に,
(1a) のように表示できる 3つの数 x, y, z は連立方程式 (1) をみたす.」

という意味で,

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{連立方程式 (1)} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ということである. この等式の両辺は (ベクトルではなくて) ベクトルの集合であること, 等式の意味も「**集合として等しい**」という意味であることに注意.

また, この右辺の集合は次のように表わす場合もある (「生成する空間」の記号).

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

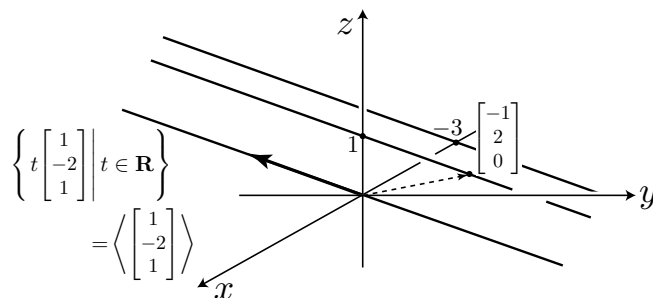
ここで「2つの集合 A, B が等しい: $A = B$ 」の意味を確認しておく.

「 $A = B$ 」は「 $A \subset B$ かつ $A \supset B$ 」と同じ意味で

「 A に属す任意の元は B にも属し 逆に B に属す任意の元は A にも属す」

「 $a \in A \Rightarrow a \in B$ かつ $b \in B \Rightarrow b \in A$ 」.

(1),(2) の解は, 同次化方程式 (0) の解 (それが $\langle \cdot \rangle$ の部分) の前に 1 つのベクトルを足した形をしている. 空間図形としては「原点を通る直線の平行移動」と見ることができる.



一般に, 非同次の連立方程式 $Ax = b$ の解の集合と, その同次化 $Ax = 0$ の解の集合 の関係について, 次のことが分かる

定理. [連立方程式の「解の様子」定理] $Ax = b$ に解が存在するとき,

$$(Ax = b \text{ の解の集合}) = [Ax = b \text{ の解の 1 つ } x_0] + \langle Ax = 0 \text{ の解の集合} \rangle$$

ただし, 右辺は前に述べた“固定された部分を外に出した”表示である.

証明: $Ax = b$ の解の 1 つを x_0 とする. つまり $Ax_0 = b$.

【(左辺) $\supset$ (右辺)】 (01) (右辺) $\ni y$ とする. つまり $y = x_0 + x_1$ で $Ax_1 = 0$.

$$(02) \quad Ay = A(x_0 + x_1) = Ax_0 + Ax_1 = b + 0 = b.$$

(03) よって $y \in$ (左辺).

【(左辺) $\subset$ (右辺)】 (01) (左辺) $\ni y$ とする. つまり $Ay = b$.

$$(02) \quad z = y - x_0 \text{ とおく.}$$

$$(03) \quad Az = A(y - x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = 0$$

$$(04) \quad y = x_0 + z \in \text{(右辺)}.$$

証明終 $\square$

・ここで, 解の 1 つ x_0 は, 解であればどれを選んでも良い. 例えば (1) の解は

$$(1a_2) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (t \text{ は実数})$$

と表わしてもよい. なぜなら 集合 としては 同じものを表すからである.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

直線の図をもう一度みてほしい. 平行移動のベクトルが違ってても, 点の集合として 同じ直線になっている. また, 直線の 方向ベクトル は (0 以外の) 定数倍をしてもよい.

わかりやすい 解の表示 を心がけてほしい

$$(A) \begin{cases} 3x + 1y + 2z = 5 \\ 4x + 2y + 3z = 7 \\ 5x + 3y + 4z = 9 \end{cases} \quad \text{の解は 普通に解くと} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だが,

$$(Aa) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

の方が見やすいし, 使い易いであろう.

“無駄な” 表示 は避けるべし

(2) の解答として 次は正しいだろうか?

$$(?) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2, t_3 \text{ は実数})$$

これは, 解の集合の記述としては 偽ではない のだが

連立方程式の 解の記述としては 正しいとは認めない.

理由: “無駄” のせいで 誤解を招くからである.

まず, $t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の項が『無駄』なのは明らか. また, 実際の解の 1 つ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 1), (10, -2, 0), (1, 0, 1), (5, 6, -2)$ など 何通りもの組で表せてしまう. 気をつけないと 解の自由度 (p.56) が 3 かと読み違ってしまう. そのような面倒を避けるために, 解の表示には同次化方程式の 1 次独立な解「基本解」(p.56) を用いるべきなのである. そうすれば, 1 つの解が何通りもの係数で表わされる現象は生じず 無駄がない.

まとめ: 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は, その 1 つの解 $\mathbf{x}_0$ と同次化 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の 1 次独立 な解「基本解」 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ (s が解の自由度) を用いて

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_s \mathbf{a}_s \quad (c_1, \dots, c_s \text{ は任意})$$

の形で表わす. なるべく ($\mathbf{x}_0$ も含めて) わかりやすい表示を用いるべきである.

「1 次独立」は線形代数の重要な概念・用語である. 線形代数学第二 で本格的に学ぶ.

もう少し変数の多い例を挙げておこう。教科書 p.56 の類題で、

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad (4) \text{ 同じ左辺} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

を解くと、まず (3) の方は

$$(3a) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は実数}).$$

(4) の解は 初めのベクトルだけ変わって下線部は変わらない。それぞれ、解の集合で表わすと

$$(3a_2) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{で} \quad (4a) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \text{左に同じ} \right\rangle.$$

解の自由度は 3 である。次元が高いので絵は描けないが、同次化方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が“平行移動”している現象は、既に証明した通りである。

「行列の階数 (rank) と解の自由度の関係」を思い出しておこう。

解が存在するとき： (解の自由度) = (未知数の個数) - (係数行列 A の階数)

問 (3) では $3 = 5 - 2$, 問 (1),(2) では $1 = 3 - 2$ として 成り立っている。

“読みにくい記述” も避ける。 (3a) を、次のように記述するのはあまり良くない。

$$(\text{読みにくい表示}) \quad \begin{cases} x_1 = 3 + c_1 - 3c_2 - c_3 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = -2 + 2c_3 \\ x_5 = c_3 \end{cases} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は実数}).$$

理由は、例えば「解のうちで $x_5 = 1$ のものが存在するか？」と考えた場合など、解の変化を読み取るのに適さない。ベクトルを使った解の表示は

1 つ解があったとして、それより x_5 が 1 大きい別の解を作るには x_1 を -1 , x_3 を $+2$ すればよい (それ以外は変えない)

というようなメッセージを、最大限に読み取りやすくした記述なのである。