

高校数学だった 行列 (2×2 行列まで) (by 山田)

決して難しくない. 自力で確認して欲しいことのまとめ.

行列の計算 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ と $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について,

$$\text{和} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

差 $A - B$ + を $-$ に変えて同上

$$k \text{ 倍} \quad kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{積} \quad AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{指で確認} \end{aligned}$$

$$\text{ベクトルへの作用} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

行列の積は非可換

実数の計算では積の交換法則 $ab = ba$ が成り立つが, 行列の計算では積の交換法則が成り立たない:

$$\text{一般には } BA \neq AB.$$

零行列 O ・単位行列 E 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

実数の計算で 1 は「何にかけてもその数を変えない」: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
行列でその役目を果たすのが単位行列 E .

$$AE = EA = A$$

実数の計算で 0 は「何にかけてもゼロにする」: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
行列でその役目を果たすのが零行列 O .

$$AO = OA = O$$

零因子の存在

行列の積に関して「 $XY = O$ ならば $X = O$ または $Y = O$ 」は成り立たない.

例えば
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

逆行列 A^{-1}

実数の計算では、0 以外の各々の数 a に対して逆数 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ が存在して $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ となる。行列の計算でも、行列 A に対して $AX = XA = E$ をみたす行列 X を A^{-1} と書いて「 A の逆行列」と呼ぶ。

ところが、行列の計算では、

零行列 O でない行列でも、逆行列が存在するとは限らない。

実は、

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、 $ad - bc \neq 0$ のときにだけ A の逆行列 A^{-1} がただ 1 つ存在して

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

なお、 $ad - bc$ を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の 行列式 という。

例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ であり、
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ は行列式が $1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ となり、逆行列を持たない。

逆行列の利用：行列の式 $AX = B$ で A の逆行列 A^{-1} が存在すれば、それを両辺に 左から かけて $X = A^{-1}B$ を得られる。

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である。順序に注意。定義「 $X(AB) = (AB)X = E$ が成り立つ行列 X が $(AB)^{-1}$ 」を確認すること。

行列と連立 1 次方程式 行列を使って連立 1 次方程式を表すことができる。

例えば

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{は} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{となる.}$$

この両辺に $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を左からかけて、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と解くことができる。

ケーリー・ハミルトンの公式 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、次が常に成り立つ。

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O.$$