

無限次元では $(W^\perp)^\perp = W$ は成り立たない

話に入る前に, (暫定的に) 次の記号を導入しておく.

$$\mathbf{R}^\infty := \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid \text{各 } a_i \in \mathbf{R}, (i \in \mathbf{N})\}.$$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ に対し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_N^2)$$

が $\cdot$ 収束しないことを $\|\mathbf{a}\| = +\infty$, $\cdot$ 収束することを $\|\mathbf{a}\| < +\infty$ と表し, 後者の場合, その値の平方根 ($\in \mathbf{R}$) を $\|\mathbf{a}\|$ とする.

さて, 我々の考える線形空間 $\mathcal{H}$ は次である. **ヒルベルト空間**

$$\mathcal{H} := \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathbf{R}^\infty \mid \|\mathbf{a}\| < +\infty\}$$

$\mathcal{H}$ を実感するため, 例えば 次のことを確認してほしい.

- $(1, 1, 1, 1, 1, \dots) \notin \mathcal{H}$.
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right) \in \mathcal{H}$. • $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots\right) \notin \mathcal{H}$.

事実 1 : $\mathcal{H}$ は線形空間である. つまり, 和とスカラー倍について閉じている.
(証明) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathcal{H}$ とする. つまり

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i^2 = \|\mathbf{a}\| < +\infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N b_i^2 = \|\mathbf{b}\| < +\infty, \quad (1)$$

であるとして, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$ について考察する.
 N を固定すると,

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^N (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) = \sum_{i=1}^N a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N a_i b_i + \sum_{i=1}^N b_i^2$$

仮定 (1) から, $N \rightarrow \infty$ で第 1 項, 第 3 項は収束する. 問題は第 2 項であるが, N を固定しているときは, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ を “第 N 成分までで切った” ものを $\mathbf{x}^{(N)}$ と表す

$$\mathbf{x}^{(N)} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$$

ことにすると, シュバルツの不等式から,

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i = \langle \mathbf{a}^{(N)}, \mathbf{b}^{(N)} \rangle \leq \|\mathbf{a}^{(N)}\| \cdot \|\mathbf{b}^{(N)}\|$$

となって, さらに 任意の N について $\|\mathbf{a}^{(N)}\| \cdot \|\mathbf{b}^{(N)}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ であるから第2項の極限も収束する. よって $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| < +\infty$, つまり $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ がスカラー倍について閉じているのは明らか. $\square$

この証明の中で, 「問題は第2項である」以降で次のことが示されている.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i \text{ は収束する.}$$

これが $\mathcal{H}$ 上の内積を定めることは容易に示される. この内積を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ と表す.

($\mathbf{R}^\infty$ 上では $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i$ は内積にはならない. $+\infty$ は実数でないことに注意)

さて, 次の線形部分空間を W とする.

$$W := \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathcal{H} \mid \exists N \text{ s.t. } (\forall n > N \Rightarrow a_n = 0) \}.$$

「途中から後は0ばかり」「0でない成分が有限個」の元の集まりである.

W は $\mathcal{H}$ の部分空間であって ($W \subset \mathcal{H}$), $W \neq \mathcal{H}$ である.

これに関して, 次のことが示される.

事実2: $W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(証明) 任意の自然数 i に対して

$$\mathbf{e}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \quad (\text{第 } i \text{ 成分のみ } 1 \text{ で他は全て } 0)$$

は W の元である: $\mathbf{e}_i \in W$.

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots) \in W^\perp$ とすると, 任意の i に対して $v_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ なので $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

このことから,

$$(W^\perp)^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = \mathcal{H} \neq W.$$

あまり気がついていないかも知れないが, 多項式 (何次式でも構わない) の集合 $\mathbf{R}[x]$ は上記の W に近い集合である.

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \quad (= e^x) \quad \notin \mathbf{R}[x].$$

うそだと思った人は, この式が 何次式か 考えてみて下さい!