

生成する線形空間 (by 山田)

言葉に慣れるには、正しい例文をたくさん読み聞きすると良い。

記号：線形空間 V 内のベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が 生成する線形空間 を $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ と表す. (注: “かっこ”の用法は、著者や研究分野によって異なる)

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \{ \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ はスカラー} \}.$$

準備: $\mathbb{R}^3$ を xyz -空間とみなす. その中の最も簡単な部分空間として:

$$\text{「}xy\text{-平面」} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

1 線形空間を生成するベクトルの組は1通りではない.

$$(1) \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である.} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

並び順を変えても生成される線形空間は同じ.

$$(2) \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である.}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \text{「}xy\text{-平面」} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{注を参照})$$

証明. [左辺 $\subset$ 右辺] 任意の実数 λ_1, λ_2 に対して

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{「}xy\text{-平面」}.$$

[左辺 $\supset$ 右辺] xy -平面の任意のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ (x, y は実数) に対して

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{x-y}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x+2y}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \square$$

ここで、係数の分数式はどうやって求めたのかというと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = x \\ -X + Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とにおいて X, Y を解いた. 解が存在したこと が決め手.

2 生成するベクトルに“無駄”がある場合もある。（“無駄” = 1 次従属）

$$(3) \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である.}$$

ゼロベクトルは生成する線形空間を広げない.

$$(4) \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である. } \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ に一致.}$$

「左辺 $\supset$ 右辺」は明らか. 「左辺 $\subset$ 右辺」の方は次のように考える.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ なので}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\lambda_2 + 2\lambda_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である. } \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ なので}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\lambda_1 + 2\lambda_3) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\lambda_2 + \lambda_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(6) \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ は } xy\text{-平面である.}$$

3 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間「方程式 $x + 2y - 4z = 0$ の解空間」の場合：

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \text{ は任意} \right\}.$$

$$(7) \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = W. \quad \text{つまり, } \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ は } W \text{ を生成する.}$$

$$(8) \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = W. \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を } \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ に取りかえた.}$$

$$(9) \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

注 2つの集合 A, B が等しい $A = B$ とは「 $A \subset B$ かつ $A \supset B$ 」ということ.
つまり, 「 A に属する元 (要素) は B にも属し, なおかつ, 逆に B に属する元は A にも属す」ということ.

基底 と 次元 (by 山田)

例 1 $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は「 $\mathbb{R}^3$ の標準基底」と呼ばれる.

確認 (1) [1 次独立性]

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{を解くと} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

確認 (2) [生成 性] $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ はその 3 つのベクトルの 1 次結合.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

例 2 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

確認 (1) [1 次独立性]

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{を解くと} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

確認 (2) [生成 性] $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ はその 3 つのベクトルの 1 次結合.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + 3y - 8z) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-x - 2y + 5z) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (x + 2y - 4z) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

それぞれどう計算したかというと,

(1) では c_1, c_2, c_3 に関する方程式 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を,

(2) では, 与えられた x, y, z に対して $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に関する方程式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

を, 解いた. どちらの計算でも, 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ が正則行列であったことが決め手.

思い出そう: 正方行列では

$$A \text{ が正則行列} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は full rank} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dots$$

例3 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底 ではない.

確認せよ：一次独立だが, $\mathbb{R}^3$ を生成していない (少なすぎる)

例4 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底 ではない.

確認せよ： $\mathbb{R}^3$ を生成しているが, 1 次独立でない (多すぎる)

例5 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底 ではない.

注：基底でないことの証明は 確認 (1) または (2) の一方だけでよい.

確認 (1) [1 次独立性] が成り立たない.

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{を解くと} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \text{ は任意.}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解 (例えば $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 1$) が存在する.

確認 (2) [生成 性] が成り立たない. $\mathbb{R}^3$ 内に, その 3 つの 1 次結合では表せない

ベクトルが存在する. 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ には解がない.

$$\text{基本行変形} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

どちらの計算でも, 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ が 階数 2 (< 3) であったことが決め手.

次元の一意性： (有限次元の場合)

線形空間 V に対して, 基底の取り方はいろいろある. が,

定理 18.2 (p.126) 基底をなすベクトルの 個数 は一定である.

その 個数¹ を 線形空間 V の「**次元** $\dim V$ 」という.

・線形空間の考察では, 次元 が全ての基礎になる.

¹この講義では, 無限次元の線形空間は扱わない.