行列の演算に関する詳細 (by 山田)

$\boxed{1}$ **積の結合法則**　3つの行列 A, B, C について, 積が計算可能なとき

$$(AB)C \ = \ A(BC) \ = \ ABC$$

1つめの等式が重要. そのおかげで ABC が誤解なく <u>定められる</u> という主旨.
まず 行列の型をチェックする. AB, BC の積が計算可能なので A, B, C の型を

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & m & \times & n & & \\ B & : & & & n & \times & r \\ C & : & & & & & r \times s \end{array}$$

としよう. すると

$$\begin{array}{ccccc} AB & : & m & \times & r \\ BC & : & n & \times & s \end{array}$$

となり

$$\begin{array}{ccccc} (AB)C & : & m & \times & s \\ A(BC) & : & m & \times & s \end{array}$$

となって, $(AB)C$ と $A(BC)$ の型が一致することがわかる.
次に, 成分の一致を確かめる.　記号を準備する.

記号（山田の流儀）：　$(A)_{i,j}$ で「行列 A の (i,j) 成分」を表すとする.
すると, 行列の積 AB の成分は 次の通り

$$(AB)_{i,j} \ = \ \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,j}$$

証明：

$$\begin{aligned} \big((AB)\,C\big)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{r} (AB)_{i,l}(C)_{l,j} && (1) \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,l} \right) (C)_{l,j} && (2) \\ &= \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le r}} (A)_{i,k}(B)_{k,l}(C)_{l,j} && (3) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} \left(\sum_{l=1}^{r} (B)_{k,l}(C)_{l,j} \right) && (4) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(BC)_{k,j} \qquad = \big(A\,(BC)\big)_{i,j} && (5) \end{aligned}$$

□

(3) の Σ 和 が “新しい用法”

> $\displaystyle\sum_{条件★}$ と書いたら, その条件★に合うもの 1つにつき1回, 重複なく
>
> 漏れもなく 項の和を取る という意味.　（このとき, 和の順序は自由）
>
> 注：条件は文脈に応じて意味を読み取る.

$\boxed{2}$ **積の 非可換性**

$$一般に \qquad BA \neq AB$$

これは

「($BA = AB$ となる例もあるが)
常に $BA = AB$ が成り立つとは限らない」

という意味.　もっと詳しくいうと

AB が計算可能でも

BA は [1] 計算不可能な場合　　　　　　　　がある.
[2] 計算可能でも, 型が異なる場合
[3] 計算可能で 型が一致しても, 成分が異なる場合

それぞれの例を挙げよう.

[1]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \qquad\qquad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \qquad\qquad , \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

[3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \qquad\qquad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$\boxed{3}$ **零因子**

実数の法則として　「$ab = 0$ ならば “$a = 0$ または $b = 0$”」　が成り立つ.
行列ではこの法則が成り立たない.

$A \neq O$ かつ $B \neq O$ でも $AB = O$ となる例がある.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

そのような行列を 零因子 という.

$\boxed{4}$ **逆行列の論理**（代数学の基礎）
準備：単位行列を E とする．（I と書く人もいる.）

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})$$

E の性質　（積の単位元：数の 1 に対応）
[1]　（積が可能な）任意の行列 X に対して $XE = X$.
[2]　（　同　上　）任意の行列 Y に対して　$EY = Y$. ☆

定理　この [1], [2] を両方満たす行列は E のみ.　　$\forall$ は「any：任意の」

証明：E' が [1], [2] を両方満たすとする.
つまり　[1'] $\forall X,\ XE' = X$. ★　[2'] $\forall Y,\ E'Y = Y$.

[2] ☆ で $Y = E'$ の場合に　$EE' = E'$.
[1'] ★ で $X = E$ の場合に　$EE' = E$.　　この 2 つにより　$E' = EE' = E$.　□

注：[1] と [1'] だけ, あるいは [2] と [2'] だけ からでは, この証明は完成しない.

定義（正則行列） (p.25)　正方行列 A に対し

$$(1)\ AB = E \qquad \text{かつ} \qquad (2)\ BA = E$$

を満たす正方行列 B が存在するとき, B を「A の逆行列：A^{-1}（インバース)」という.
（積の逆元：数 x の逆数 x^{-1} に対応）　・「逆行列をもつ行列」を 正則行列 という.

定理 $\boxed{}$

だからこそ「A^{-1}」と名付けることができる.

証明：B' が (1)(2) を両方満たすとする．つまり

$$(1')\ AB' = E \qquad \text{かつ} \qquad (2')\ B'A = dE$$

このとき

$$B' = B'E = B'(AB) = (B'A)B = EB = B$$

□

注：(1) と (1') だけ, あるいは (2) と (2') だけ からでは, この証明は完成しない.
しかし 実際には (1),(2) の一方が成り立てば, 他方も自動的に成り立ち, $X = A^{-1}$ となる．このこと は数ヶ月後に学ぶ（行列式による）.

$\boxed{5}$ **逆行列の性質** (1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ （順序に注意）

証明： $(AB)^{-1}$ とは

$$(AB)X = E \quad \text{かつ} \quad X(AB) = E \tag{1}$$

をみたす X のことであった.

今, 計算で

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underline{BB^{-1}}A^{-1} = A\underline{E}A^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B\underline{AA^{-1}}B^{-1} = B\underline{E}B^{-1} = BB^{-1} = E$$

つまり $X = B^{-1}A^{-1}$ が (1) の条件をみたす.

$$\boxed{}$$

だから $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ □

(1') 発展形 $(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$, (3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

(3) $k \neq 0$ のとき $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$. $\boxed{}$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\left(2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$\boxed{6}$ **クロネッカーのデルタ** (p.184) $i = j$ のときだけ “生きている” 項

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

練習： $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$ これは $EA = A$ の (i, j) 成分の確認.