

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ の別証明 p.60 (by 山田)

基本行変形 $\Leftarrow$ 対応 $\Rightarrow$ 基本行列を左からかける

[復習] 基本行列とは「単位行列に 1 回の基本行変形を行なってできる行列 (p.22)」であり、3 種類ある $P_i(\alpha), P_{ij}, P_{ij}(\alpha)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$ かつ $i \neq j, \alpha \neq 0$) .

$P_i(\alpha)$ = 「単位行列の 第 i 行を α 倍 ($\alpha \neq 0$) したもの」 .

P_{ij} = 「単位行列の 第 i 行と第 j 行を交換したもの」 .

$P_{ij}(\alpha)$ = 「単位行列に 第 i 行に第 j 行の α 倍 ($\alpha \neq 0$) を加えたもの」 .

行列式は $\det(P_i(\alpha)) = \alpha, \det(P_{ij}) = -1, \det(P_{ij}(\alpha)) = 1$ でいずれも $\neq 0$.

補題 1 基本行列 F について $\det(F) \neq 0$.

補題 2 基本行列 F の逆行列 F^{-1} は基本行列であり、“逆操作” に対応する.

	$P_{ij}(\alpha)$ を左からかける.	$\Leftarrow$ 対応 $\Rightarrow$	「第 i 行に第 j 行の α 倍を加える」
例 :	$\uparrow$ 逆行列		$\downarrow$ 逆操作
	$P_{ij}(-\alpha)$ を左からかける.	$\Leftarrow$ 対応 $\Rightarrow$	「第 i 行から第 j 行の α 倍を引く」

【 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ の証明】 A, B はともに n 次正方行列であるとする.

< 1 > A が基本行列のとき $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

証明：基本行列を F で表す.

(i) $F = P_i(\alpha)$ のとき $P_i(\alpha)$ を左からかける $\Leftrightarrow$ 第 i 行を α 倍

行列式の性質「ある行を α 倍したら行列式は α 倍となる」から

$$\det(FB) = \alpha \det(B) = \det(F) \det(B).$$

(ii) $F = P_{ij}$ のとき P_{ij} を左からかける $\Leftrightarrow$ 第 i 行と第 j 行を交換

行列式の性質「2つの行を交換すると -1 倍になる」から

$$\det(FB) = -\det(B) = \det(F) \det(B).$$

(iii) $F = P_{ij}(\alpha)$ のとき

$P_{ij}(\alpha)$ を左からかける $\Leftrightarrow$ 第 i 行に第 j 行の α 倍を加える

行列式の性質「ある行に別の行の α 倍を加えても行列式は変化しない」から

$$\det(FB) = \det(B) = \det(F) \det(B).$$

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も, $\det(FB) = \det(F) \det(B)$.

< 2 > A の簡約化を K とする. 「 A が N 回の基本変形で K になる」
 $\Leftrightarrow$ 対応 $\Rightarrow F_N \cdots F_2 F_1 A = K$ (各 F_i は基本行列) (1)

< 1 > の結果を N 回適用して $|F_N| \cdots |F_2| \cdot |F_1| \cdot |A| = |K|$ (2)

また, (1) 式に B を右からかけて $F_N \cdots F_2 F_1 AB = KB$.
 再び < 1 > の結果により $|F_N| \cdots |F_2| \cdot |F_1| \cdot |AB| = |KB|$ (3)

< 2-1 > **rank(A) = n のとき** $\Rightarrow A$ の簡約化 K は単位行列 I : $K = I$.

式 (2) の 右辺 $|K| = |I| = 1$. つまり

$$|F_N| \cdots |F_2| \cdot |F_1| \cdot |A| = 1. \quad (4)$$

また, 式 (3) の右辺は $KB = IB = B$ により $|B|$ となる. つまり

$$|F_N| \cdots |F_2| \cdot |F_1| \cdot |AB| = |B|. \quad (5)$$

式 (4) と (5) の両辺を交代してかけ, 補題 1 に注意して, 両辺にある 0 でない項 $|F_N| \cdots |F_2| \cdot |F_1|$ を消すと $|AB| = |A||B|$.

< 2-2 > **rank(A) < n のとき** $\Rightarrow A$ の簡約化 K は “最下行がゼロ” の行列

行列式の性質「ゼロの行を持つ行列式はゼロ」により $|K| = 0$. 式 (2) について, 補題 1 により 各 F_i について $|F_i| \neq 0$ だから $|A| = 0$.

また, 計算により KB も “最下行がゼロ” の行列になるので $|KB| = 0$. 式 (3) について, 再び補題 1 により $|AB| = 0$. よって, この場合 $|AB| = |A||B| (= 0)$.
 (証明終)

証明と同時に, 次の 4 つの条件の同値性 (「正則行列」のプリントを参照) も概ね証明されている.

- (a) $\text{rank}(A) = n$ (A は full rank)
- (b) $\det(A) \neq 0$
- (c) A が, 何回かの基本行変形で単位行列 $I (= I_n)$ になる
- (d) A はいくつかの (n 次) 基本行列の積 ($A = F_1^{-1} \cdots F_N^{-1}$)

また, この証明の応用として, 次の公式も理解できるだろう.

$$\bullet \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B). \quad \bullet \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A).$$

ヒント: A の簡約化 K について, 第 $\text{rank}(A)$ 行めより下が全てゼロとなる.