

行列の対角化 (by 山田)

n 次正方行列 A は, そのまま「 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 $f_A: A$ を左からかける」とみなすことができる.

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

A が対角行列であると, この写像の様子は非常にわかりやすい.

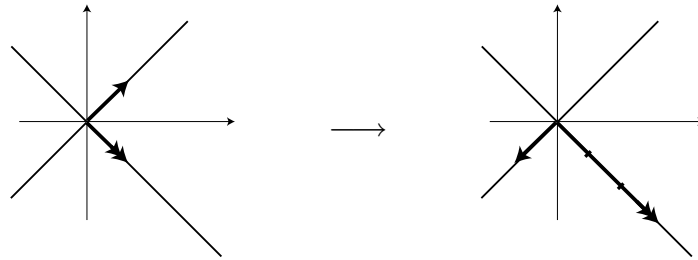
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{bmatrix}.$$

「各第 i 座標 x_i ごとにそれぞれ α_i 倍 (拡大・縮小, 反転) する写像」である.

発想 (線形第一では予習を含む): 一般に, 線形空間 V から V 自身への線形写像 $f: V \rightarrow V$ は, V に基底 $\mathcal{B}$ を 1 つ定めれば, V と同じ次元の $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim V$) が同一視できて (「基底 $\mathcal{B}$ に関する座標」による), f は (行列を左からかける写像として) 行列表示される. 基底 $\mathcal{B}$ のとりかたはいろいろあるがこれをうまくとれば, 行列表示が簡単になって写像 f の様子がわかりやすい, という発想である.

しかも, 始めから $V = \mathbb{R}^n$ で $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ の場合でさえも, 基底を (標準基底ではない基底に!) とりかえることで f の様子がわかりやすくなることがあるのだ. それが対角化の本質である.

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角化: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ によって $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.



用語 (p.87): A を n 次正方行列とする.

$$A\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}) \quad (1)$$

となるとき, α を A の**固有値**, $\mathbf{a}$ を A の固有値 α に関する**固有ベクトル**, α に関する固有ベクトルの集合 $V_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\}$ (記号は $V(\alpha)$, W_α など) を「 A の α に関する**固有空間**」とよぶ (p.168).

考え方と求め方: 式 (1) を $(\alpha E - A)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ と変形してこう考える:
ベクトル $\mathbf{x}$ に関する方程式

$$(\alpha E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

が $\mathbf{0}$ 以外の解 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ をもった, と. そのためには $\det(\alpha E - A) = 0$ が必要となる.

[Step1] λ に関する n 次方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解く. (A の**固有多項式** p.88)
その解 α_i が A の固有値 となる.

[Step2] 各固有値 $\lambda = \alpha_i$ に対して x に関する方程式 (2) を解く (固有空間 $V(\alpha_i)$) .

ここから先の一般論は難しくなる (固有方程式が重解や虚数解をもつとき大変) .

そこで, ここでは次の条件をみたす場合だけ 考察する (定理 13.7 p.91).

【条件】 固有方程式の解が実数解のみ $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (r 個とした) で,

固有空間 $V(\alpha_i)$ の次元の和が $n : \sum_{i=1}^r \dim V(\alpha_i) = n$ のとき, 対角化可能*.

〈事実〉 このとき, すべての固有空間 $V(\alpha_i)$ の基底に通し番号をつけた $a_1, a_2, \dots, a_n$ は 1 次独立となり, $\mathbb{R}^n$ の基底となる (p.128). $P = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ とおく.

〈事実〉 により $\det P \neq 0$. P は正則行列. P^{-1} が存在する.

α_i の添字 i は対応する a_i に応じてつけかえる.

[Step3] 下の原理 (n 個の式を並べて 1 つの式にする) により, P^{-1} を左からかけて,

$$\begin{array}{rcl} A a_1 & = & \alpha_1 a_1 \\ A a_2 & = & \alpha_2 a_2 \\ & \ddots & \\ A a_n & = & \alpha_n a_n \end{array} \quad n \text{ 個の式を並べて, 1 つの式に}$$

$$A [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] = [\alpha_1 a_1 \ \alpha_2 a_2 \ \dots \ \alpha_n a_n] \quad \checkmark \text{ 便利な表記法}$$

$$AP = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \alpha_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

$P^{-1}AP$ は対角行列となる. 対角成分に固有値 α_i が並ぶ.

注*: 対角化できない行列もある. 例えば次の一番左の 2 つのような行列, それを含むような行列 (左から 3 つ目). 対角化するために虚数が必要になる例として一番右の行列 (回転) .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

対角化できない行列には「ジョルダン標準形」という理論がある. 早めに学びたい場合はこのキーワードで図書などを探すと良い.

定義 n 次正方行列 A, B が, 正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ となるとき「 A と B は相似」という. 仮に行列が可換なら A に一致したはずの “ A に近い” 行列である.

命題 13.5 (p.89): 相似な行列の固有多項式は一致する. 固有値は重複度も含めて一致する.

固有多項式の係数: 固有多項式 $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ について

・ $(n-1)$ 次 $c_{n-1} = -\sum \alpha_i = -\text{tr} A$ 「固有値の重複を含めた和 $\cdot (-1)$ 」

・ 定数項 $c_0 = (-1)^n \prod \alpha_i = (-1)^n \det A$ 「固有値の重複を含めた積 $\cdot (-1)^n$ 」