線形といえば, (by 山田)

「線形○○」「１次○○」と言ったら、

<u>足し算</u>（＋）と <u>スカラー倍</u> について何か条件を課した

と心得るべし．教科書の索引を使って, いろいろな用語の意味（課した条件）を調べよ．ここではいくつかまとめておく．以下では V, W などは空集合ではないとする．

$\boxed{1}$ (p.103) V を $\mathbb{R}^n$（n 次元数ベクトル空間）とする．次の２つの 演算 に注目する．

(1) <u>和</u> が定義されている．つまり

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$$

「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が V に属すならば, **和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ も V に属す」

厳密に数式記号を用いると　$\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b} \in V \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$　であるが,「$\Rightarrow$ “ならば”」は “である全ての場合に ” と解釈して通常「$\forall$ “任意の”」は省略される．以下では全て省略形で述べる．

(2) <u>スカラー倍</u> が定義されている．つまり

$$k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in V \quad \Rightarrow \quad k\boldsymbol{a} \in V$$

(1+2：合わせ技)　V 内で１次結合が定義される．つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V \quad \Rightarrow \quad k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \in V$$

・$k_1 = k_2 = 1$ にすれば 条件 (1) を, $k_2 = 0$ にすれば 条件 (2) を導く．

● ２つの演算 “足し算” と “スカラー倍” を定義された集合を **線形空間** という (p.103).

$\boxed{2}$ (p.31, p.108) $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の **１次結合** であるとは,

n 個のスカラー $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在して
$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ と表わされること．

$\boxed{3}$ (p.112) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の **１次関係式** とは, それらの１次結合で $\boldsymbol{0}$ を表す

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

の形の式のこと．すべての係数 c_i が 0 のとき「自明な１次関係式」という．
逆に, 少なくとも１つの係数が 0 でないとき「非自明な１次関係式」という．

$\boxed{4}$ (p.53, p.112) （V 内で）ベクトルの集合 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が**1次独立** であるとは,

「『$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ 』が成り立つ」こと

言い換えると

「$c_1 = \cdots = c_r = 0$ 以外では $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ は成り立たない」こと

を表す. スカラーの 0 in $\mathbb{R}$ とゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ in V の区別に注意. 1次独立でないことを1次従属という. つまり, r 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が**1次従属** であるとは,

「$c_1 = \cdots = c_r = 0$ 以外で $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$
となる係数 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ が存在する」こと

を表す. つまり「<u>非自明な</u> 1次関係式が存在する」ことを表す.

$r = 2$（2個 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$）のとき：

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が1次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ または $\exists c, \boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$（平行）.

$r = 3$（3個 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$）のとき： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1次従属 となるのは,

- 3つのうち 少なくとも1つが $\boldsymbol{0}$,
- 3つのうち ある2つ または 3つ全て が平行,
- $\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ の形の関係式が成り立つ,

のいずれかの場合であるが, “場合”で説明するのは面倒.

例1： $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ の3つは 1次独立. なぜなら

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を解くと $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となるため.

例2： $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix}$ の3つは 1次従属. なぜなら

非自明な1次関係式 $-7\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ (p.105) $\mathbb{R}^n$ 内の（or 線形空間 V の）空でない部分集合 W が V の**線形部分空間**であるとは, 次の3条件が成り立つこと

(0) $\boldsymbol{0} \in W$

(1) W が <u>和</u> に関して閉じている. つまり $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(2) W が <u>スカラー倍</u> に関して閉じている. つまり $k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W$

(1+2：合わせ技) W が1次結合に関して閉じている. つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W \quad \Rightarrow \quad k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \in W$$

例 1 ： $V=\mathbb{R}^n$ とする. $m\times n$ 行列 A に対して, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解の集合
$N(A)=\{\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.
これを「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**解空間**」,「A の**零空間**」という (p.107).

例 2 ： $V=\mathbb{R}[x]_n$（n 次以下の多項式のなす線形空間）のとき $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し
$X_\alpha:=\{\,f\in\mathbb{R}[x]_n\,|\,f(\alpha)=0\,\}$ とする.　X_α は $\mathbb{R}[x]_n$ の部分空間である.

$\boxed{6}$ (p.108) V 内で $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ が **生成する**部分空間（**張られる**部分空間）
（記号は $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle$）とは, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合の集合, つまり

$$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle=\{\,c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r\,|\ \text{各 } c_i\in\mathbb{R}\,\}.$$

「$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ が V を**生成する**」とは　$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle=V$, つまり
「V に属す任意のベクトルが $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表される」こと.

・$m\times n$ 行列 A の列ベクトル分割 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$ に対して

$$C(A)=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\rangle$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間であり「A の**列空間**」という.

$\boxed{7}$ (p.117) 線形空間の **基底** と **次元**.
線形空間 V の中の有限個のベクトルの組 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ が ,

(1) V を生成し　　なおかつ　　(2) 1 次独立

のとき, $\mathcal{B}$ を V の 基底 という. 実は, 次のことが成り立つ.

定理 18.2： 線形空間 V が, 有限個のベクトルからなる基底をもつ
(p.126)　とき, 基底の取りかた は何通りもあるが,
基底をなす ベクトル の個数 は変化しない.

そこで, この「ベクトルの個数」を V の**次元**（$\dim V$）という.

(　0 次元 は点,　1 次元 は線,　2 次元 は面,　3 次元 は空間, ...　)

例： $V=\mathbb{R}^n$（次元は n）のとき, $\boldsymbol{e}_i$ を「i 番目のみ 1 で他が全て 0 のベクトル」
とすると $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** と呼ばれる.

$$\mathbb{R}^3 \text{ の標準基底：}\quad \left(\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$\boxed{8}$ (p.142) V, W は線形空間とする. **写像** $f : V \to W$ **が線形写像**であるとは, f が次の条件をみたすこと

(1) f は $\underline{\text{和}}$ を保つ. つまり「和の像は像の和」+ が外に出せる.

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \quad \text{in } W$$

左辺の + は V 内の和, 右辺の + は W 内の和, 同じものではない.

(2) f は $\underline{\text{スカラー倍}}$ を保つ. つまり「k 倍の像は像の k 倍」定数倍が外に出せる.

$$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a}) \quad \text{in } W$$

(1+2：合わせ技)： f は 1 次結合を保つ.

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) \quad \text{in } W$$

例 1 ：行列の定める写像 (p.153). $m \times n$ 行列 A に対して

$$\begin{array}{cccc} f_A : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}. \end{array}$$

例 2 ：微分 (p.144).

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{d}{dx} : & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \dfrac{df}{dx}. \end{array}$$

$(f+g)' = f' + g'$ や $(cf)' = cf'$（$c \in \mathbb{R}$） と習っただろう.

$\boxed{\text{線形空間の例}}$ (p.104) — $\mathbb{R}^n$ だけではない —

２つの演算 “和” と “スカラー倍” を定義された集合を **線形空間** という.

例 1 ：平面や空間のベクトルの集合としての $\mathbb{R}^2$（２次元）, $\mathbb{R}^3$（３次元）,
それらの一般化としての $\mathbb{R}^n$（n 次元）.
例 2 ：x に関する n 次以下の多項式の集合
$\mathbb{R}[x]_n = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ （$n+1$ 次元）.
例 3 ：$m \times n$ 行列の集合 $M_{m\times n}$（mn 次元）.
例 4 ：$\mathbb{R}$ 上の C^∞（あるいは C^n）級関数の集合 $C^\infty(\mathbb{R}), C^n(\mathbb{R})$,（次元は無限）.

「線形○○」「１次○○」のような用語は 本来, 一般の 線形空間 について定義される.

$\boxed{9}$ (p.119) **座標**

n 次元の線型空間 V に基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ を 1 つ固定する.

「基底」の定義（1 次独立, 生成 性）から V の各ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \qquad (\text{各 } c_i \in \mathbb{R})$$

と基底の 1 次結合の形に表される. しかも, その係数 $c_1, \ldots, c_n$ は, 1 つの $\boldsymbol{v}$ に対して 1 通りに限られる. そこで, 係数を順に並べた $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ をこう呼ぶ：

基底 $\mathcal{B}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の 座標（記号：$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$）

用語の意味を確認するために例文を紹介する.

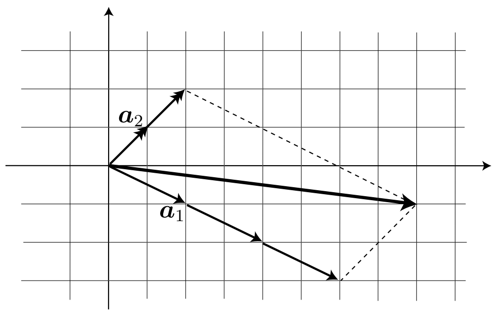
・$V = \mathbb{R}[x]_2$（2 次以下の多項式のなす線形空間）とする.

[例文] “ベクトル”$\boldsymbol{f} = 7x^2 - 3x + 4$ の, 基底 $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p}_2 = x^2, \boldsymbol{p}_1 = x, \boldsymbol{p}_0 = 1\}$ に関する座標は $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. その意味は $\quad \boldsymbol{f} = 7\boldsymbol{p}_2 + (-3)\boldsymbol{p}_1 + 4\boldsymbol{p}_0$

・$V = \mathbb{R}^2$ とする.

[例文] $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ の, 基底 $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ に関する座標は $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

その意味は $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に他ならない（図から意味を理解せよ！）.



このポイントは

線形空間 V が, 基底 $\mathcal{B}$ を固定したことによって, $\mathbb{R}^n$ と同一視されたこと

$$\boxed{V \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathbb{R}^n}$$

にある. ここで, 集合 X と Y の 同一視 とは, X の各元に対して Y の元を 1 対 1 に対応させること である. $\mathbb{R}^n$ は よく理解された 集合であることに注意.

$\boxed{10}$ **１次結合の表記法**　便利 (p.115)

・例えば，１次結合　$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$　は，行列の成分計算を応用して，次の右辺のように表示すると便利である．

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \quad = \quad \Big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\Big)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

・この表示法をさらに応用して，２つ以上の１次結合（左辺）を表すために，

$$\Big(\ a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2\ ,\ a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{22}\boldsymbol{a}_2\ \Big) \quad = \quad \Big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\Big)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

の（右辺）のように表すのが便利である．例えば

$$\Big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\Big) \ = \ \Big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\Big)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{または} \qquad \Big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\Big) \ = \ \Big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\Big)A$$

と書いたら，その意味は次の通り．　　　　　　　　a_{12} と a_{21} の配置に注意！

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 = a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 \end{cases}$$

特に，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が $\underline{\mathbb{R}^m \text{ の (縦) ベクトルの場合は}}$，成分をそのまま配置して行列計算に持ち込むことができる（行列の列分割 (p.31) とも整合する）．例えば，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

とすると，ベクトルの関係式

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 + (-2)\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 = 5\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \Big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\Big) \ = \ \Big(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\Big)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

が成り立ち，成分の関係は

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

確認

$$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(\ 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ \right).$$