

内積 (by 山田)

$\mathbb{R}^n$ において, 成分を $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表わすとき, 次の関数をユークリッド内積 (標準内積) という.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (= {}^t \mathbf{a} \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (\text{ユ})$$

この関数は, 次の 3 大性質をみたす.

双線形: $\langle c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle = c_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + c_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle,$
 $\langle \mathbf{a}, d_1 \mathbf{b}_1 + d_2 \mathbf{b}_2 \rangle = d_1 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle + d_2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_2 \rangle.$

対称性: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle.$

非負性: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$. さらに $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

【発想の転換: 抽象化】 この 3 性質をみたすものを全て「内積」と呼ぶことにする.

定義 (p.181): 一般に, 線形空間 V に対して関数 $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ が, 上の性質を (「内積の 3 公理」として) みたすとき, その関数 $(\cdot, \cdot)$ を V 上の内積 と呼ぶことにする. 1 つの V に対して内積は一意的ではない.

今後, $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積は内積の具体例 ($V = \mathbb{R}^n$ で計算法 (ユ) と指定した特殊な例) に過ぎない.

ノルム (長さ) $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ と定める.

内積の例 ユークリッド内積 以外 (p.182, p.183)

(例 1) $\mathbb{R}^3$ 内の, 2 次元の線形部分空間 $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\}$ に対し,
内積として $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積を V に制限したもの (計算が同じ) を用いると,
・ V の基底 $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に関するこの内積の内積行列は $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$.

(例 2) $\mathbb{R}^2$ 内で, 次のように定めた関数は内積である.

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 = [a_1, a_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

内積行列で内積を定めた, と考えてもよい.

・ この内積では $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 2$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$, $\mathbf{e}_1 \perp (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$ などとなっている.

(例 3) 集合 $C^0[0, 1]$ と $\mathbb{R}[x]_n$ (n は自然数) を次のものとする.

$$\begin{aligned} C^0[0, 1] &= \{ \text{区間 } 0 \leq x \leq 1 \text{ を定義域にもつ連続関数} \}, & \text{無限次元} \\ \mathbb{R}[x]_n &= \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R} \}. & (n+1) \text{ 次元} \\ & \text{“高々 } n \text{ 次以下の多項式 の集合”} \end{aligned}$$

どちらも線形空間である。多項式を関数とみなすことによって、後者は前者の部分空間とみなせる。さて、 $C^0[0,1]$ または $\mathbb{R}[x]_n$ において、2つの元 f_1, f_2 に対して 値

$$(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) dx$$

を対応させる関数は 内積 となる。 $C^0[0,1]$ や $\mathbb{R}[x]_n$ は内積空間となった。
 $\mathbb{R}[x]_n$ の基底として $(\mathbf{p}_0 = 1, \mathbf{p}_1 = x, \dots, \mathbf{p}_n = x^n)$ をとると、

$$(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \int_0^1 x^i x^j dx = \frac{1}{i+j+1}$$

となる。初めは慣れないかも知れないが、「 $x^2 - 3x$ と $2x + 5$ の内積は $-\frac{22}{3}$ 」となる。

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x, 2x + 5) &= (\mathbf{p}_2 - 3\mathbf{p}_1, 2\mathbf{p}_1 + 5\mathbf{p}_0) \\ &= 2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) - 6(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) + 5(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0) - 15(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} - 15 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{22}{3}. \end{aligned}$$

あるいは $\int_0^1 (x^2 - 3x) \cdot (2x + 5) dx$ を計算しても同じ値になる。

また、「 $x^2 - 3x$ と $14x - 9$ は直交」となる。(⇒ ノルム や なす角も！)

シュワルツの不等式 (p.183) : どんな内積空間でも 次の不等式が成り立つ。

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

3角不等式 : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

内積行列 n 次元の線形空間 V に内積 $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。

また、 V の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ を1つ固定する。

このとき、次の行列を「(内積空間 V の) **基底 $\mathcal{B}$ に関する内積行列**」という。

$$T (= T_{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n) \end{bmatrix} \quad (i, j)\text{-成分は } (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j).$$

さて、 V のベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n$ (各 $c_i \in \mathbb{R}$) と一意的に表される。

この係数を並べた $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を「 $\mathbf{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 : $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 」と呼ぶのだった。

便利な公式 : $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n$ と $\mathbf{w} = d_1 \mathbf{b}_1 + d_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + d_n \mathbf{b}_n$ に対し

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = {}^t[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}} [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}.$$

座標も行列も、基底 $\mathcal{B}$ に関して 定まることに注意。

内積の対称性により、 T は対称行列。内積の非負性により T は次の条件をみたす：

任意の “ T の対角線上の部分正方行列” の行列式 (特に、各対角成分も $|T|$ も) 正。

例題 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 8, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3, (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 4$ のとき、 $(5\mathbf{a} + 9\mathbf{b}, 6\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = ?$

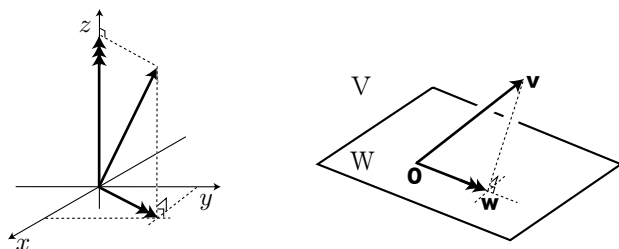
$30(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 15(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \cdots$ と展開するより早い方法がある！

正射影 p.186 (by 山田)

xyz -空間の中の点 $A(a, b, c)$ の場合,

- (1) xy -平面への正射影は $(a, b, 0)$. (2) z -軸への正射影は $(0, 0, c)$.

それほど難しい概念ではないはずだが, 数学としての完全な定義は意外に難しい.



[設定] V を内積を備えた線形空間. W を V の線形部分空間とする.

このとき, まず「 W の直交補空間 (記号 $W^\perp$)」を次のように定義する (p.124).

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{x \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して } (x, w) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid x \perp W \quad (\text{任意の } x \in W \text{ に対して } x \perp w)\} \end{aligned}$$

W と $W^\perp$ は次の関係をみたす.

・ $W^\perp$ は V の線形部分空間. 次元は $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

・ $W \cap W^\perp = \{0\}$.

この2つの性質を $V = W \oplus W^\perp$ と表す. また, (有限次元なら) $(W^\perp)^\perp = W$ となる.

例: 通常の $\mathbb{R}^3$ を xyz -空間とみたとき,

- (1) $(xy\text{-平面})^\perp = (z\text{-軸})$. (2) $(z\text{-軸})^\perp = (xy\text{-平面})$.

定義: V を内積を備えた線形空間. W を V の線形部分空間とする.

「 $v(v \in V)$ の W への正射影 w 」とは, V の分解 $V = W \oplus W^\perp$ に対応した v の分解

$$v = w + w^\perp \quad (w \in W, w^\perp \in W^\perp)$$

に現れる w のこと.

$v - w$ は, W に属す任意のベクトルと直交する. ($v - w = w^\perp \in W^\perp$ だから)

注意: $(v - w) \perp w$ だが, 正射影の確認としては, それだけでは不十分 (W の1つのベクトルと直交しているだけでは不十分). W の基底をなす各ベクトルと直交していれば十分.

【正射影の公式】 V を内積を備えた線形空間. W を V の r 次元線形部分空間とする.

$(u_1, u_2, \dots, u_r)$ が W の 正規直交基底 のとき, $v(v \in V)$ の W への正射影 w は

$$w = (v, u_1)u_1 + (v, u_2)u_2 + \dots + (v, u_r)u_r$$

確認せよ: 上のようにしたとき, $v - w$ と各 u_i は直交する.

グラム・シュミットの正規直交化 (p.187) 練習問題風

正規直交基底 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ を作るアルゴリズム

1 $\mathbb{R}^4$ 内のベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 を

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{とする.}$$

[直交化] (1) まずは $b_1 = a_1$ とする.

(2) $b_2 = a_2 - cb_1$ とおく. $b_2 \perp b_1$ となるための c は $c = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$.

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 \quad \text{を求めよ.} \quad b_2 \perp b_1 \text{ を確かめよ.}$$

(3) $b_3 = a_3 - (c_1 b_1 + c_2 b_2)$ とおく. $b_3 \perp b_1$ かつ $b_3 \perp b_2$ となるための c_1, c_2 を求めると $c_1 = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)}, c_2 = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)}$.

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 \quad \text{を求めよ.}$$

(4) $b_4 = a_4 - \frac{(a_4, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_4, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(a_4, b_3)}{(b_3, b_3)} b_3$. 以下同様.

★ 得られた b_i はそれぞれ, 自由に (0 以外で) スカラー倍してよい.

次の作業「正規化」で, 同じ向きのまま長さを1にするのだから.

[正規化] 各 b_i ($i = 1, 2, \dots$) と同じ向きで長さが1のベクトル u_i を求める $u_i = \frac{1}{\|b_i\|} b_i$.

一般の場合でも, このような手順で得られる (u_1, u_2, u_3, u_4) は正規直交基底である.

注: 得られる正規直交基底 (u_i 達) は, もとの基底 (a_i 達) によって異なり, その順序にも依存する.

2 [正射影の公式] $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ とし, 一般のベクトル $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ ($\in \mathbb{R}^4$) とする.

(1) 上の1の続きで, $W_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ とする. $W_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$ でもある.
 v の W_2 への正射影 w_2 を求めよ.

(2) さらに $W_3 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ とする.
 v の W_3 への正射影 w_3 を求めよ. ($W_3^\perp$ への正射影も求めよ)

(3) 一般のベクトル x の W_2 への正射影を w とすると, ある 4×4 行列 P を用いて $w = Px$ と表せる. その行列 P を求めよ.