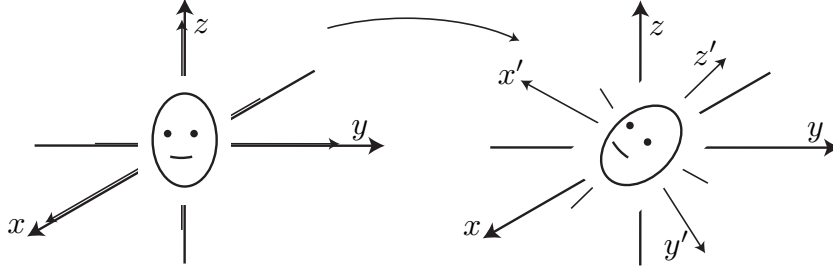


座標変換・基底変換 (山田)

「上向いて右向いて」

設定 最初の状態で、顔と座標軸の関係を左図の通りとする

鼻軸が x -軸（前が正），耳軸が y -軸（左が正），首軸が z -軸（上が正）



さて、顔（座標軸）を次のように動かして新しく $x'y'z'$ -座標軸を作る（右図）ときの基底変換行列 P を求めたい。

- (1) 30度 上を向く（耳軸を軸に），それに続いて
- (2) 30度（本人からみて）右を向く（首軸を軸に），それに続いて
- (3) 30度（本人からみて）時計回りに首を傾げる（鼻軸を軸に）。

(1), (2), (3) それぞれの 基底変換行列は

$$(1) \text{ に対して } P_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & 0 & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{6} & 0 & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ に対して } P_2 = \begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{6} & -\sin -\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin -\frac{\pi}{6} & \cos -\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ に対して } P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問1 問題の基底変換行列 P を求めるには、この3つの行列 P_1, P_2, P_3 をどうすれば良いか？ 右／左から順にかける？ 逆行列も必要？...（基底変換の問題）

問2 新しい座標 (x', y', z') で ${}^t(4, 8, 8\sqrt{3})$ となる点の古い座標 (x, y, z) による表示を求めるにはどんな計算をすれば良いか？（座標変換の問題）

考えるヒント：

- ・ 2次元（平面）で考える。 ・ 3回の移動でなく2回の例でたす。
- ・ 30度を90度に変えてやってみる。 ・ $(4, 8, 8\sqrt{3})$ でなく $(1, 0, 0)$ などて試す

答はすぐには教えない。 頭で考えることが大切，というわけさ。

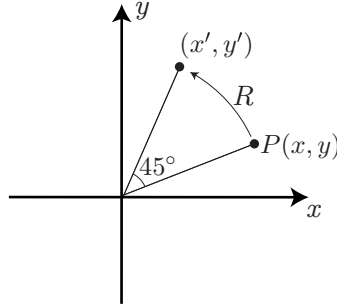
座標と 1 次変換（回転）（山田）

微妙に違う 2 つの問題を解き分けよ.

問 1₁ xy -平面からそれ自身への次の 1 次変換 $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える.

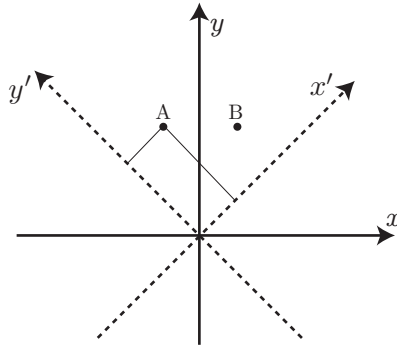
原点中心に点 $P(x, y)$ を反時計回りに $45^\circ (= \frac{\pi}{4})$ 回転した点 (x', y') を P の像 $R(P)$ とする

この 1 次変換 R を行列表示せよ.



問 1₂ 平面（2次元線形空間）内に 2 つの座標軸をとる.

- (1) 座標軸 xy を, 原点を中心に反時計回りに 45° 回転して新しい座標軸 $x'y'$ をつくる. xy 座標による標準基底 (e_1, e_2) から $x'y'$ 座標による標準基底 (e'_1, e'_2) への基底変換行列を求めよ.
- (2) $x'y'$ -座標で $(1, 2)$ と表示される点 (図 A) の xy -座標での表示を求めよ. 計算法 (前問の行列の使い方: 座標変換) を示すこと.



さらに, $x'y'$ -座標で $(2, 1)$ の点を B とし, $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ となる点 C を次の各方法で作図せよ.

- (a) $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ の幾何的な意味から作図
- (b) $x'y'$ -座標での成分計算で点 C をプロットせよ
- (c) xy -座標での成分計算で点 C をプロットせよ
- (d) 問題 (b) で得た C の $x'y'$ -座標を xy -座標に変換して点 C をプロット