正則行列　(by 山田)　教科書では, 何か所かに散らばって書かれている

(**p.58**, p.26, p.59, p.74, p.118, p.128, p.153, p.161)

A が n 次 正方行列であるとき, 以下のそれぞれの条件は互いに同値.

【0】A **は正則行列である**

【1】A の逆行列 A^{-1} が存在する

【2】行列式が 0 でない： $|A| \neq 0$

【3】A の階数が n である： $\mathrm{rank}\ A = n$
つまり, 階数が行列の行数・列数に一致する： “A は full rank”

【4】$\boldsymbol{x}$ の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について, 任意の $\boldsymbol{b}$ に対して解が存在する

【5】$\boldsymbol{x}$ の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ
A の零空間 $N(A)$ (p.107) の次元が 0： $\dim N(A) = 0$

【6】A の簡約行列が E_n である
A は 行基本変形 で単位行列 E_n に変形できる. （列変形でも同様）

【7】A はいくつかの n 次の基本行列 (p.43) の積である

【8】(a) $BA = E$ となる n 次正方行列 B が存在する
(b) $AB = E$ となる n 次正方行列 B が存在する

【9】A の列分割 (p.30) $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ による n 個のベクトルが
(a) 1 次独立　(b) $\mathbb{R}^n$ を生成する（張る）　(c) $\mathbb{R}^n$ の基底となる
(d) A の列空間 $C(A)$ (p.132) の次元が n： $\dim C(A) = n$　(p.118, p.128)
A の行分割 でも同様

【10】線形空間 V の中で $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ が 1 次独立とする.

$$(\,\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n\,) = (\,\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\,)A$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ が 1 次独立である　(p.115)

【11】A が定める $\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ （$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$）が
(a) 単射　(b) 全射　(c) 同型　(d) 可逆　(p.160, p.161)

証明方針

$$
\begin{tikzcd}
\text{【0】} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{【1】} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{【5】} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
& \text{【2】} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{【9】(a)} & & \\
& & & \text{【10】【11】} & \text{【8】(a)} \arrow[uu, Rightarrow] & \text{【3】} \arrow[ddl, Rightarrow] \\
& \text{【8】(b)} \arrow[uu, Rightarrow] & & \text{【9】(b)} & & \\
& & \text{【4】} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Leftrightarrow] & & \text{【6】} \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{【7】}
\end{tikzcd}
$$

【4】$\Rightarrow$【8】(b) の証明： 各 i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$ の解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ とおく（$A\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{e}_i$）．このとき, 行列 $B=[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n]$（列分割）は $AB=E$ をみたす：

$$AB=A[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n]=[A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_n]=[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n]=E \qquad \square$$

用語　$A=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$（列分割）, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ とおく.

- (p.53)「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ が **一次独立**」とは

  「『$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ ならば $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$』が成り立つ」

  こと.

- 「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ を**生成する**」とは

  「$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n$ の形で表せる」

  こと.