線形写像の表現行列 （山田）

$\boxed{問}$ $\mathbb{R}^3$ 内で次のような２次元の線形部分空間 V と W を考える．
V の基底 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 及び, W の基底 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を次の通りとする．
以下の行列などを求めよ．

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y=z \right\}. \quad \mathcal{A}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right),$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y \right\}, \qquad \mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right),$$

(1) V の基底 $\mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}_2$ への変更に伴う 座標変換行列 P
　および 基底 $\mathcal{A}_2$ から $\mathcal{A}_1$ への変更に伴う 座標変換行列 P'
(2) W の基底 $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ へ, および その逆向き の座標変換行列 Q, Q'.

さて, V から W への線形写像 f を下の様に定める．

$$\begin{array}{cccc} f: & V & \to & W, \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x-4y \\ 3x-4y \\ 7x-3y-3z \end{bmatrix} \end{array}$$

これについて, 次の行列を求めよ．

(3) 基底 $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ に関する f の表現行列 F

(4) 基底 $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1$ に関する f の表現行列
(5) 基底 $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_2$ に関する f の表現行列
(6) 基底 $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$ に関する f の表現行列

$\boxed{問}$ (4), (5), (6) のそれぞれの行列を, (1), (2), (3) の行列 P, Q, F から
計算する方法を示せ．（Hint: 図式を書いて “なぞって” みよ）

$\boxed{問}$ 図式を書いて $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in V$ および $f(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -10 \end{bmatrix} \in W$ の座標を
追跡してみよ．

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad [f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \mapsto f(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}_2} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad [f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -18 \\ 4 \end{bmatrix}$$