

線形代数学 線形写像の表現行列 (山田)

意味を知る

[設定] 2 つの線形空間 V と W の間の線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対して,
線形空間 V が 3 次元で, 基底: $\mathcal{B}_V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ と
線形空間 W が 2 次元で, 基底: $\mathcal{B}_W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ を指定した.

問

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2, \\ \text{[基底の像]: } f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2, \\ f(\mathbf{v}_3) &= -3\mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

であるとき, V のベクトル $\mathbf{v} = 8\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$ の像 $f(\mathbf{v})$ を求めよ.

【律儀な解答】 f の線形性を使って展開の計算をする. 書くと長い.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(8\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3) && (\mathbf{v} \text{ の書き換え}) \\ &= 8f(\mathbf{v}_1) - 7f(\mathbf{v}_2) + 5f(\mathbf{v}_3) && (f \text{ の線形性}) \\ &= 8(3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2) - 7(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2) + 5(-3\mathbf{u}_2) && (\text{各基底の像}) \\ &= 24\mathbf{u}_1 + 32\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_1 + 14\mathbf{u}_2 - 15\mathbf{u}_2 && (\text{展開}) \\ &= \underline{17\mathbf{u}_1 + 31\mathbf{u}_2} \text{ (答)} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

【計算の核心部分】 次の計算をすればよい. 数の配置をよく見ること.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \end{pmatrix}$$

実は, この計算を名称で説明すると

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ の基底 } \mathcal{B}_V \text{ と } \mathcal{B}_W \text{ に} \\ \text{関する表現行列} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{v} \text{ の基底 } \mathcal{B}_V \text{ に関} \\ \text{する座標ベクトル} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} f(\mathbf{v}) \text{ の基底 } \mathcal{B}_W \text{ に} \\ \text{関する座標ベクトル} \end{array} \right)$$

となる. つまり, 線形写像の表現行列とは,

写像 f による V から W への対応を, 座標ベクトルの対応で
とらえて “行列 A を左からかける” の形で表すときの, 行列 A

である. 論理的には次の 3 つのことが基になっている.

- 線形空間は, 基底を固定すれば “座標ベクトル” のアイデアで同じ次元の $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim V$) と同一視 (1 対 1 で対応させること) できる.
- $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像は必ず “ある (m, n) 行列を左からかける” 形で表すことができる.

- V や W は (線形空間と仮定しただけで) 具体的にはどんな集合かわからない. v などと表したものの, Av などと行列をかけられるような対象とは限らない.

線形写像の表現行列の求め方:

定義域 V にとった基底 v_i ($i = 1, 2, \dots$) のそれぞれの像 $f(v_i) \in W$ の基底 B_W に関する座標ベクトルを順に並べる.

上記の出題の場合は, 各 $f(v_i)$ が与えられていたので, 縦横に気をつけて係数を並べるだけでよかった.

一般の場合にそうなる理由: (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ に e_i (第 i 成分が 1 でそれ以外は全て 0 の n 項縦ベクトル $\in \mathbb{R}^n$) をかけると A の第 i 列ベクトルが取り出される.

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{1i}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

この計算と前頁で述べた「表現行列」の式を見比べる. 定義域 V にとった基底を $B_V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ とすると, 座標ベクトルが $e_i (\in \mathbb{R}^n)$ になるのは $v_i (\in V)$ だから, A の第 i 列ベクトルが $f(v_i) (\in W)$ の基底 B_W に関する座標ベクトルになればよい, とわかる.

先の出題での [基底の像] の 3 つの式は, 行列の積演算を応用すれば, 次の 1 つの式で表すことができる.

$$\begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

注: この両辺は, 成分が (数でなく) W のベクトルである横 3 項ベクトルになっている (W^3 での等式?). 便利だが, 何だか無駄に高度で, 整備されていない概念といえる.

この記法を認めれば, 次のことも成り立つ.

出題の [設定] のもとで, f の表現行列とは

$$\begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} T$$

となる $(2, 3)$ 行列 T のことである.