空間図形：直線と平面

直線の式：　点 $A(a_1,a_2,a_3)$ を通る, 方向ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ の直線の式

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$

ただし v_1,v_2,v_3 の中に 0 がある場合は式を変形する.
（例 $\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{0}=\frac{z-6}{3}$　とはせず　$\frac{x-4}{1}=\frac{z-6}{3},\ y=5$ とする.）
注意：見かけの違う式が同じ直線を表すことがある.

考え方：　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\boldsymbol{v}\quad(t\in\mathbb{R})$　と表せる点 $X(x,y,z)$ の集合と考える.

平面の式：　点 $A(a_1,a_2,a_3)$ を含む, 法線 ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ の平面の式

$$v_1(x-a_1)+v_2(y-a_2)+v_3(z-a_3)=0$$

変形すると　$v_1x+v_2y+v_3z=v_1a_1+v_2a_2+v_3a_3$

左辺は 1 次式で，右辺は定数.

考え方：　$\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{AX}}$　つまり　$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}=0$　となる点 $X(x,y,z)$ の集合と考える.

点と平面の距離の公式：点 (x_0,y_0,z_0)　と　平面 $ax+by+cz=d$　との距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

考察：点が平面上にあれば距離は 0. 公式の分子が 0 になることと対応している.

チェック項目

(A1) 3点を含む平面の式を求める.
(A2) 交わる平面と直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
(A3) 直線の式とその上にない点の座標が与えられたとき,
　　それらを含む平面の式を得る.
(A4) 交わる2直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
(A5) 交わる2平面の式が与えられたとき, 交線の式を得る.
(A6) 交わる2直線 あるいは 平行な2直線の式が与えられたとき,
　　それらを含む平面の式を得る.

(B1) 2つの直線の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
　一致 / 平行 / 交わる / ねじれの位置

(B2) ２つの平面の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
一致 / 平行 / 交わる
(B3) 直線の式と平面の式が与えられた時, 位置関係を判断する.
含まれる / 平行 / 交わる

(C1) 点の座標と直線の式から「点と直線の距離」を求める.
(C2) 点の座標と平面の式から「点と平面の距離」を求める.
(C3) 平行な２直線 または ２平面の式から, その「幅」を求める.
(C4) ねじれの位置の２直線の式から「最短距離」を求める.
(C5) 交わる 直線と平面 の式から, その 直線と平面のなす角 を求める.
(C6) 交わる２平面の式から, その ２平面のなす角 を求める.

(D) ねじれの位置の２直線の式から「最短距離を与える２点」の座標を求める.

練習問題：xyz-空間内で，点の座標 や 直線・平面の式を次の通りとする.

$$
\begin{array}{llll}
\text{点} \quad A: & (4,-7,0) & & \\
\text{直線} \quad l: & \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{3} & m_1: & \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-3}{-6} \\
m_2: & \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-8}{1} & m_3: & \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-4}{1} \\
\text{平面} \quad \alpha: & x-2y+3z=6 & \beta: & x-y-z=-11 \\
\gamma_1: & 2x-4y+6z=6 & \gamma_2: & 2x-4y+6z=12
\end{array}
$$

(a2) 直線 l と平面 α の交点の座標を求めよ.
(a3) 直線 l と点 A を含む平面の式を求めよ.
(a4) 交わる２直線 l と m_2 の交点の座標を求めよ.
(a5) 交わる２平面 α と β の交線の式を求めよ.
(a6) 交わる２直線 m_1 と m_2 を含む平面の式を求めよ.
(b1) 直線の組４種類：l と m_1 / m_2 と m_3 / m_1 と m_2 / m_1 と m_3 / の位置関係を述べよ.
(b2) 平面の組３種類：α と β / α と γ_1 / α と γ_2 / の位置関係を述べよ.
(b3) 直線と平面の組３種類： l と α / m_2 と β / m_3 と β / の位置関係を述べよ.
(c1) 点 A と 直線 l の距離を求めよ.
(c2) 点 A と 平面 α の距離を求めよ.
(c3) 平行な２直線 m_2 と m_3, また 平行な２平面 γ_1 と γ_2 の幅を求めよ.
(c4) ねじれの位置の２直線 l と m_3 の間の最短距離を求めよ［外積を用いるのが早い］
(c5) 交わる２平面 α と β のなす角を求めよ.
(c6) 直線 l と平面 α のなす角を φ_1 とするとき $\cos\varphi_1$ を求めよ.
直線 l と平面 β のなす角を φ_2 とするとき $\cos\varphi_2$ を求めよ.
(d) ねじれの位置の２直線 l と m_3 について最短距離を与える２点の座標を求めよ.

外積（ベクトル積） (by 山田)

1 定義　$\mathbb{R}^3$ の２つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して，次のベクトルを

$\boldsymbol{a}$ **と** $\boldsymbol{b}$ **の外積（ベクトル積）**とよび $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と表す.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad = \quad \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

覚え方

$$\begin{array}{ccl} a_1 & b_1 & \\ & & \cdots\cdots\cdots(3) \\ a_2 & b_2 & \\ & & \cdots(1) \\ a_3 & b_3 & \\ & & \cdots\cdots(2) \\ a_1 & b_1 & \end{array}$$

例：$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix}$.

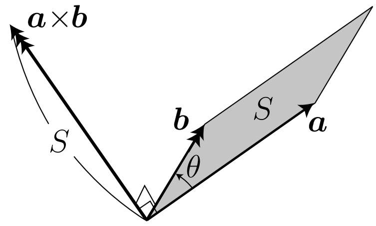
2 幾何的性質

(1)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**方向**は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する.

(2)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**長さ**は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで定まる平行四辺形の面積である.

(3)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**向き**は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ がこの順に 右手系.

この３つの性質で $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は特徴つけられる.



3 公式

(1) [線形性]
$$\begin{aligned} (c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} &= c_1(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}) + c_2(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}). \\ \boldsymbol{a} \times (d_1 \boldsymbol{b}_1 + d_2 \boldsymbol{b}_2) &= d_1(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1) + d_2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2). \end{aligned}$$

(2) [交代性]　$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.　特に，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(3) [ラグランジュの公式]　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると
$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 \quad = \quad \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \quad = \quad (\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta)^2.$$

(4) [結合法則をみたさない]　一般に　$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

例：$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 一方 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

外積 の利用例

【問１】 (a1) ３点 $A(1,0,0),\quad B(0,2,0),\quad C(0,0,3)$ を含む平面の式を求めよ.

解説：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\2\end{bmatrix}$ が 法ベクトル（の１つ）で，点 A を通っているから　$6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0.$　整理して　$6x+3y+2z=6.$（答）

この平面の式は $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ と表示しておくと確認しやすい.（図を描いてみよ.）

【問２】 (c4) ねじれの２直線 l と m の最短距離を求めよ.

$$l:\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-6}{3},\qquad m:\frac{x}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-4}{1}$$

解説：最短距離を与える l,m 上の点を求めなくて良い場合は, 次の方法が早い.

(1) m を含み, l と平行な平面 α の式を求める.

(2) l 上の点と平面 α の距離を求める.

(1) 平面 α の法ベクトルは，２直線 l,m の方向ベクトル $\vec{v}_l,\vec{v}_m$ のどちらとも垂直.

そのようなベクトルは外積で求められる：　$\vec{v}_l\times\vec{v}_m=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\-3\end{bmatrix}.$

α は m を含み m 上に点 $(0,-4,4)$ があるので α の式は

$$-(x-0)+5(y+4)-3(z-4)=0,\quad 整理して\quad x-5y+3z=32.$$

(2) l 上に 点 $(4,5,6)$ があるので l から α への距離は

$$\frac{|4-5\cdot5+3\cdot6-32|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+3^2}}=\sqrt{35}.\qquad (答)$$

【問３】 (a5) ２平面 α と β の交線 l を求めよ.

$$\alpha:x-2y+3z=6,\qquad \beta:x-y-z=-11$$

解説：求める交線 l の方向ベクトル $\vec{v}$ は，２平面の法ベクトルの両方に垂直.
外積で求められる：

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$$

l は 平面 α,β の両方に属す点 $(-28,-17,0)$ を通る, 方向ベクトル $\vec{v}$ の直線

$$l:\frac{x+28}{5}=\frac{y+17}{4}=\frac{z}{1}.\quad (答)$$

注：連立方程式 $\begin{cases}x-2y+3z=6\\x-y-z=-11\end{cases}$ の解が $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-28\\-17\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$ であることと対応.