2種類の「変換行列」　(山田)

座標 (p.119)

n 次元の線型空間 V に基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ を1つ固定する.「基底」の定義（1次独立, 生成 性）から V の各ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \qquad (\text{各 } c_i \in \mathbb{R})$$

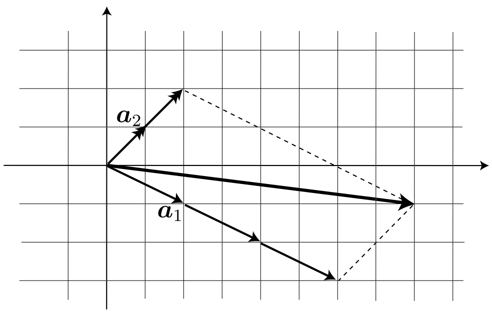
と基底のベクトル達の1次結合の形に表される. しかも, その表し方（係数 $c_1 \ldots c_n$）は1つの $\boldsymbol{v}$ に対して 1通り に限られる. そこで, 係数を順に並べた $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ をこう呼ぶ：

$$\boxed{\boldsymbol{v} \text{ の 基底 } \mathcal{B} \text{ に関する座標（記号：}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}\text{）}}$$

ここで注意して欲しいことは, 線形空間 V の基底を固定したことによって, V と $\mathbb{R}^n$ を同一視（V の各元に対して $\mathbb{R}^n$ の元を1対1に対応させること）できた, ということである. 用語の意味を確認するために1つ例文を作ってみよう. $V = \mathbb{R}^2$ とする.

[例文] $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ の, 基底 $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ に関する座標は $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

その意味は, $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に他ならない.



$\mathbb{R}^2$ のいろいろなベクトル, あるいは $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ について, この例文の基底に関する座標を求めてみて欲しい.

座標変換行列

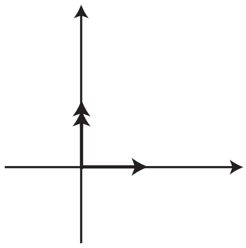
線形空間 V について, 基底の取り方は1通りではない.（しかし, 基底をどんなに取り替えても基底のベクトルの個数が変わってしまうことはあり得ない, それで, その個数を **次元** というのだった.）基底を取りかえれば それに関する座標は変わる. その変化について詳しく見てみよう.

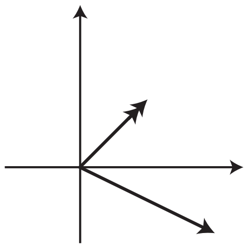
理論を後回しにして観察から始める. $V = \mathbb{R}^2$ で次の3種類の基底 $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ を考える. $\mathcal{E}$ は標準基底である.

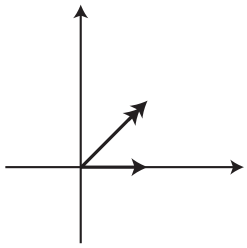
$$\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2),\quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2),\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2),\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$







いくつかの $V = \mathbb{R}^2$ のベクトルについて, それぞれの基底に関する座標を表にしてみたものが次である. 各自で確認して欲しい.

(0) V のベクトル	(1) 基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ に関する座標	(2) 基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ に関する座標	(3) 基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ に関する座標
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}8\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9\\-1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x-y\\x+2y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x-y\\y\end{bmatrix}$

次のことに気付いて欲しい：どの行に関しても, (1) の列に書いてあるベクトルに行列 $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を左からかけたものが (2) の列に書いてあるベクトルに一致する. つまり

$$(\mathcal{A} \text{ に関する座標}) = P \cdot (\mathcal{E} \text{ に関する座標}) \qquad (\text{イ})$$

という関係がある. そこで, この行列 P は

$$\boxed{\text{基底 } \mathcal{E} \text{ から基底 } \mathcal{A} \text{ への（基底の変換に伴う）}\textbf{座標変換行列}}$$

などと呼ばれる. このような “左から決まった行列をかければ得られる” 関係は, 他の列の間でも成り立つ. 各自でその行列を求めてみて欲しい. また, 今考えた P（$\mathcal{E}$ から $\mathcal{A}$）と逆向き, つまり基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{E}$ への座標変換行列が $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ になることは, 式 (イ) の両辺に P^{-1} をかけることによっても得られる：

$$(\mathcal{E} \text{ に関する座標}) = P^{-1} \cdot (\mathcal{A} \text{ に関する座標})$$

まとめておこう.

(I) 基底を取り替えると, それに伴って基底に関する座標も変わる.
(II) その変わり方は, 左からある正則行列をかける, という変化となる.
(III) その行列は「（基底の変更に伴う）座標変換行列」と呼ばれる.
(IV) 求め方：基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への（基底の変換に伴う）座標変換行列 は

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{基底 } \mathcal{A} \text{ のベクトル } \boldsymbol{a}_i \ (i = 1, 2, \cdots) \text{ の} \\ \text{基底 } \mathcal{B} \text{ に関する座標を順に並べたもの}\end{array}} \quad \text{（説明は後述）}$$

(V) 次のような 推移性 もある.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \text{ から } \mathcal{C} \text{ への} \\ \text{座標変換行列} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \text{ から } \mathcal{B} \text{ への} \\ \text{座標変換行列} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \text{ から } \mathcal{C} \text{ への} \\ \text{座標変換行列} \end{pmatrix}$$

基底変換行列（基底の取り替え行列）

実は同じ設定での下で, 良く似た別の概念「基底変換行列」というものがある. これについて説明する.

観察から始める. $V = \mathbb{R}^2$ に対して, 前の章と同じ 3 種類の基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2), \mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ を考える.

<u>基底 $\mathcal{A}$ の</u> ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の <u>基底 $\mathcal{E}$ による</u> 座標を並べた行列を作る.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{a}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

この式達を見ると, 始めに基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ があって, それらの 1 次結合によって新しい基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を構成した, その構成に用いた係数（データ）を並べたものが 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ である, というふうに理解することができる. そこで, この行列は

$$\boxed{\text{基底 } \mathcal{E} \text{ から基底 } \mathcal{A} \text{ への}\textbf{基底変換行列}}$$

という (p.162). 念のため, 基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への基底変換行列 を求めておく.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{b}_1 + (-1)\boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{a}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行列の積の計算を応用した「便利な表記法」を用いると　$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
と 2 つの式を 1 つにまとめて表わすこともできる.
ただし, この等号の両辺は「成分が V のベクトル（数でない）のベクトル（V^2 ?）」になっていて数学的には厳密ではない. 便利だから用いる記法である.
　各自で, 他の基底の間の基底変換行列を求めてみると良い.

座標変換 と 基底変換

　線形空間 V に 2 組の基底をとるという設定の下で, 基底の変更に伴う「座標変換行列」および「基底変換行列」の 2 つの概念を説明した. この 2 つは 似ているが別々の概念なので注意して欲しい. しかしながら, この 2 つは無関係ではない. 両者の関係を知って, うまく使い分けるのが理想的である.

事実 (p.164)　実は, 一般に 次のことが成り立つ.

　「基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への 座標 変換行列 」は
　「基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への 基底 変換行列 」に 等しい.　それは,
　「基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への 基底 変換行列 <u>の逆行列</u>」にも等しい.

　「〇〇から××への」の部分を特に注意. （印刷ミスではない）.

基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への 基底 変換行列を P とするとき, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の,
$\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ と $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ の関係は

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$$

である. だから,「変換行列」という（基底変換か座標変換かを略した）表現は誤解を招いたり, 利用を誤る可能性が高いので避けるべきである.

座標変換行列の求め方

基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ から基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ への（基底の変換に伴う）座標変換行列 P は

基底 $\mathcal{A}$ のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標を順に並べる.

とすればよい.

理由：一般に, $m \times n$ 行列 $M = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に $\boldsymbol{e}_i$ （第 i 成分が 1 でそれ以外は全て 0 の n 項縦ベクトル $\in \mathbb{R}^n$）をかけると M の第 i 列ベクトルが取り出される.

$$\boxed{M\boldsymbol{e}_i \ = \ M \text{ の第 } i \text{ 列ベクトル}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1i} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mi} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

この性質を利用する. 求めたい「基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への変換に伴う座標変換行列」P について, 基底 $\mathcal{A}$ の第 i 番めのベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は, $\mathcal{A}$ による座標が $\boldsymbol{e}_i \, (\in \mathbb{R}^n)$ である. 座標変換行列の意味を考えると, $P\boldsymbol{e}_i$ は $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathcal{B}$ に関する座標となる.

図式： $\begin{array}{ccc} V & \overset{\mathcal{A}}{\to} & \mathbb{R}^n \\ & {}_{\mathcal{B}}\searrow & \downarrow P\cdot \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$ 　の中で　 $\begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_i & \mapsto & \boldsymbol{e}_i \\ & & \downarrow P\cdot \\ & & P\boldsymbol{e}_i \end{array}$

これにより　$[\boldsymbol{a}_i]_{\mathcal{B}} = P$ の第 i 列ベクトル　となる. よって

$$P = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{B}} \ [\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [\boldsymbol{a}_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

メモ：4 次正方行列 P を求めたいとき,

$$P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{あ} \\ \text{か} \\ \text{さ} \\ \text{た} \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{い} \\ \text{き} \\ \text{し} \\ \text{ち} \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{う} \\ \text{く} \\ \text{す} \\ \text{つ} \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{え} \\ \text{け} \\ \text{せ} \\ \text{て} \end{bmatrix}$$

と右辺（あ〜て）の値が得られれば $P = \begin{bmatrix} \text{あ} & \text{い} & \text{う} & \text{え} \\ \text{か} & \text{き} & \text{く} & \text{け} \\ \text{さ} & \text{し} & \text{す} & \text{せ} \\ \text{た} & \text{ち} & \text{つ} & \text{て} \end{bmatrix}$ に決まる. 並べればよい.