

線分 と 正方形, 濃度は同じ (by 山田)

幾何学の危機

線分 $[0, 1]$ から 正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ への全単射が, 次のアイデアを元に構成されてしまう.

$$x := 0. a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} \cdots$$

の像 $f(x)$ を次で定める. ただし, 各 a_i は 0 から 9 までのどれか.

0. a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} $\cdots$ と交互に抜き出し,
 a_2 a_4 a_6 a_8 a_{10} a_{12} $\cdots$

$$f(x) = (0. a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} \cdots, 0. a_2 a_4 a_6 a_8 a_{10} a_{12} \cdots)$$

アイデアとしては良いのだが, この対応は 実 は 写像 ではない.

例えば $0.5000 \cdots = 0.4999 \cdots$ “表示が違っただけで実は同じ数であったこと”を思い出してほしい. それにもかかわらず,

$$f(0.5000 \cdots) = (0.5000 \cdots, 0.000 \cdots), \quad f(0.4999 \cdots) = (0.4999 \cdots, 0.999 \cdots)$$

となり, 同じ元なのに表示によって像 (の第 2 座標が) 異なり, 値が定まっていない.

工夫 1 : 有限小数は常に $999 \cdots$ をわざと用いて無限小数に直して扱うこととする.

例えば $0.25 = 0.24999 \cdots$

しかしこれだと $0 = 0.000 \cdots$ が扱えない. そこで $(0, 1]$ で考える. ($(0, 1)$ と $(0, 1]$ の濃度が同じだったことと同様に, $(0, 1]$ と $[0, 1]$ の濃度が同じであることが示される *)

工夫 2 : $[0, 1]$ から $[0, 1] \times [0, 1]$ への全単射を直接を作るのではなく, $(0, 1]$ から $(0, 1] \times (0, 1]$ への全単射をつくることにする.

しかし今度は 例えば $y = 0.204010 \cdots$ のような元の像を考えると元のアイデアのままでは, $f(y) = (0.241 \cdots, 0)$ となり像が $(0, 1] \times (0, 1]$ から出てしまうことが防げない.

工夫 3 : [ケーニッヒ] 交互に抜き取るタイミングを次のようにする. 工夫 1, 2 に加えて

0 が出たら 0 でないものが出た直後まで延ばして切る.

例 : $0.1|2|03|1|0001|9|9|9|\cdots \mapsto (0.10300019 \cdots, 0.2199 \cdots)$

工夫 1 により 0 が無限に出続けることはないことに注意.

こうして得られる写像をあらためて $f : (0, 1] \rightarrow (0, 1] \times (0, 1]$ とする.

この写像 f を元にして $[0, 1]$ から $[0, 1] \times [0, 1]$ への全単射が構成できる ($(g^{-1} \times g^{-1}) \circ f \circ g$).

以上で 線分 と 正方形 が濃度では区別できないことが示された.

参考「集合と位相」内田伏一著 裳華房

* 注 : $(0, 1]$ と $[0, 1]$ の間の全単射として, 次の写像がある.

$$g : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$$
$$x \mapsto y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } x = 0 \\ \frac{x}{2} & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x = \frac{1}{2^n} \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

幾何学の危機からの脱出 (by 山田)

位相へ (近代数学での最大の発明)

線分 $[0, 1]$ と 正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ とは, 集合と濃度の観点からは 同じものになってしまうことがわかった. しかしもちろん, 幾何学としては 線分 と 正方形 は区別される図形であってほしい. そこで,

1. 図形は, 単なる点の集合ではなくて, それに何らかの “情報” を加えた対象なのだ.
2. 図形間の写像を扱うときは, その “情報” を保つ写像だけを扱う必要がある.

と考えた. では, その “情報” とは何であろうか?

考えるヒントは, 病的なアイデアで無理矢理 構成した線分と正方形の間の全単射 f にある. 突然だが, 線分 $[0, 1]$ 内で $\alpha := \frac{1}{2} = 0.5$ に収束する数列 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^{2n+1}} = 0.500 \dots 01$ (最後の 1 は小数点 $2n+1$ 桁) に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ と $f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ を比較してみると,

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 = 0.501 & = 0.500999 \dots & f(a_1) = (0.5999 \dots, 0.00999 \dots) & = (0.6, 0.01) \\
 a_2 = 0.50001 & = 0.50000999 \dots & f(a_2) = (0.5999 \dots, 0.0000999 \dots) & = (0.6, 0.0001) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & & & \downarrow \\
 \alpha = 0.5 & & & (0.6, 0) \\
 \hline
 \alpha = 0.5 & = 0.4999 \dots & f(\alpha) = (0.4999 \dots, 0.999 \dots) & = (0.5, 1)
 \end{array}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ が 成り立っていない ことが分かる.

2つの図形 X, Y が同じだと主張したいような場合, 単に集合としての全単射 $f: X \rightarrow Y$ だけではなく, f (や f^{-1}) に次の条件を課するのが自然だ, と思えないだろうか.

条件: X 内で収束する任意の点列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$

この条件は, f が関数の場合には f が連続 と呼ばれるための条件である. 実数における極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は $\epsilon - \delta$ 論法で厳密に定義された. では一般の集合 (あるいは図形) X の上で点の列の極限 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 」 は定義されるだろうか? どうやって定義したらいいのだろうか?

X として, 関数の集合 ($C^0([0, 1])$ など) とか { 2点 A, B を結ぶ曲線 } というような集合をも想定すると, これは結構難しい議論になるだろう. 話は距離空間の定義へと続く...

- $f_n(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$, $f(x) := e^x$ として, $f_n \rightarrow f$?
- 折れ線の集合の中で $f_n \rightarrow z$ であるか?

