集合の濃度（by 山田）

「かぞえる」これって，人類最初の数学！

集合 A の元の個数が 0 または自然数のとき, A は有限集合といい, その個数を $|A|$ あるいは $\sharp A$ と書いて $\underline{A \text{ の濃度}}$ という.
重要性：集合と集合を比較するようなことを考えるとき, 有限集合では 濃度 は最大の情報.

定理： A は集合, n を自然数であるとする.

$$|A| = n \quad\Longleftrightarrow\quad \text{全単射 } f : A \to \{1,2,\cdots n\} \text{ が存在.}\ （\text{つまり } A \cong \{1,2,\cdots n\}.）$$

以下しばらく, 有限集合の話.

$\boxed{1}$ 積集合の濃度 は 濃度の積：$|A \times B| = |A| \times |B|$.

例：$A := \{\alpha, \beta\}, B := \{a, b, c\}$ のとき,

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (\alpha, a), & (\alpha, b), & (\alpha, c), \\ (\beta, a), & (\beta, b), & (\beta, c) \end{Bmatrix}, \qquad |A \times B| = 2 \cdot 3 = 6.$$

$\boxed{2}$ べき集合の濃度は 2 の濃度べき：$|2^A| = 2^{|A|}$.

ここで「A の巾集合 2^A」とは A の部分集合の集合　$2^A := \{X \mid X \subset A\}$.

ただし（もちろん） $\emptyset$ や A 自身も 2^A に含まれる.

例：$A := \{a, b, c\}$ のとき,

$$2^A = \begin{Bmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{c\} \\ A & \{b,c\} & \{c,a\} & \{a,b\} \end{Bmatrix}, \qquad |2^A| = 2^3 = 8.$$

$\boxed{3}$ 写像の集合 の濃度の公式：$|\mathrm{Map}(A, B)| = |B|^{|A|}$.

ここで $\mathrm{Map}(A, B)$ とは A から B への写像の集合のこととする.

A から B への写像 f, g が等しい「$f = g$ （in $\mathrm{Map}(A, B)$）」とは「$\forall a \in A, f(a) = g(a)$ in B」が成り立つことである．従って, $\mathrm{Map}(A, B)$ の 1 つの元 f を特定するには, A の全ての元 a に対してその像 $f(a)$ を指定することが必要かつ十分．表を作って考えるのが良い

例：$A := \{\alpha, \beta\}, B := \{a, b, c\}$ （$|A| = 2$, $|B| = 3$）

$\mathrm{Map}(A, B)$ の元を $f_i\,(i = 1, 2, \cdots)$ と書くことにして全リストを作ると

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
$f_*(\alpha) =$	a	a	a	b	b	b	c	c	c
$f_*(\beta) =$	a	b	c	a	b	c	a	b	c

$$|\mathrm{Map}(A, B)| = 3^2 = 9.$$

例えば f_2 は「$f_2(\alpha) = a$ かつ $f_2(\beta) = b$」で定まる $\mathrm{Map}(A, B)$ の元を表すとしている.

この機会に写像の用語の復習：「$f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8$ は 単射 である.」

濃度が有限でない集合は, **無限集合**と呼ばれる．無限集合には注意が必要.

無限集合の濃度の不思議（by 山田）

あぁ　無限

無限集合では $A \subset B$ かつ $A \neq B$ （真の部分集合）であっても $|A| < |B|$ とは限らない.

$\boxed{1}$ **可算無限濃度**（記号　　：$\mathbf{N}$ の濃度 $|\mathbf{N}|$ ）の集合

(1) { 偶数の自然数 } $= \{2, 4, 6, \cdots\} =: 2\mathbf{N}$

(2) { 平方数 } $:= \{n^2 \,|\, n \in \mathbf{N}\} = \{1, 4, 9, \cdots\}$

(3) 整数の集合 $\mathbf{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \cdots\}$ など.

要は, 元を 1 つづつ順番に全て並べる方法が指定できる集合は 可算無限濃度.

何番目の元か, が $\mathbf{N}$ への全単射を与える.

$\boxed{2}$ **連続体濃度**（記号　　：$\mathbf{R}$ の濃度 $|\mathbf{R}|$ ）の集合

(1) { 正の実数 } $=: \mathbf{R}_+$. 次のような全単射（関数）が存在する.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & y = \log(x) \end{array}$$

(2) $(-1, 1)$. （応用で $\forall a < \forall b$ に対し <u>開</u> 区間 (a, b). ）次のような全単射（関数）が存在する.

$$\begin{array}{cccc} f: & (-1, 1) & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & y = \tan(\frac{\pi}{2} x) \end{array}$$

$\boxed{3}$ 少し奇妙な全単射.　$|\,(0,1)\,| \quad = \quad |\,(0,1]\,|$

1 は, 左辺の集合には含まれていないが右辺の集合には含まれている. （思わず「右辺の方が 1 個多い」と言いそうになるが濃度は等しいのである.）次のような奇妙な全単射が構成できる.

$$\begin{array}{cccc} f: & (0,1) & \to & (0,1] \\ & x & \mapsto & y = \begin{cases} 2x & \text{if } \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } x = \frac{1}{2^n} \\ x & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$