

コンパクト集合 (by 山田)

空間のある種の有限性

準備と設定

- (1) (X, d) を距離空間とする。ただし、以下の説明では「距離空間」は「位相空間」に置き換えることができる。
- (2) ここでは、開集合には文字 U (添字がつく) を用いる。
- (3) 添字集合の記法 $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ というような記法 : 開集合のプリントを参照} \right)$ は避けられない。

定義 [開被覆] : 距離空間 (X, d) の部分集合 A について、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が A の 開被覆 であるとは、

- (1) 任意の λ に対し、 U_λ は X の開集合である。
- (2) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. 「 A は U_λ の和集合に含まれる。」

予備的考察 : A の開被覆 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し、 Λ から有限個の元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ($\in \Lambda$) を選び出し、

それらに対応する開集合 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_N}$ の和集合 $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$ をつくと、当然 $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

である。小さい方 $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$ は、依然として A の開被覆である場合と、そうでない場合がある。

定義 [有限部分被覆] A の開被覆 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し、 Λ の有限個の元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ について $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$

が A の開被覆であるとき、 $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$ を $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ の 有限部分被覆 という。

定義 [コンパクト] 距離空間 (X, d) の部分集合 A について、 A が コンパクト集合 であるとは、

A の任意の開被覆 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し、その有限部分被覆 $\bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$ が存在する

ことをいう。

定理 (教科書の定理 11.2) ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A について次の 2 つは同値.

- (1) A はコンパクト集合 (2) A は有界な閉集合

例: $\mathbf{R}$ 内で任意の閉区間 $[a, b]$ はコンパクト集合である.

有界であり閉集合であるから上の定理による.

(定理の証明も理解してほしい, 直接的な証明も試みると良い.)

例: $\mathbf{R}$ 内で左開区間 $(0, 1]$ はコンパクト集合ではない.

各自然数 n に対して $U_n := (\frac{1}{n}, \infty)$ とする. $(0, 1]$ の開被覆 $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \left(= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n \right)$

には有限部分被覆が存在しない.

証明: $\mathbf{N}$ から有限個の元 $n_1, n_2, \dots, n_k$ を選んだ (k をその個数とした) とする. それらの最大値を K とする. このとき和集合 $\bigcup_{i=1}^k U_{n_i}$ は $(\frac{1}{K}, \infty)$ であり $(0, 1]$ を被覆しない. 実際 $\frac{1}{2K} \in (0, 1]$ であるが $\frac{1}{2K} \notin (\frac{1}{K}, \infty)$. $\square$

以前, 「閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は上に有界である。」を証明した. 次の定理はそれを含んでいる.

定理: コンパクト集合 A 上の連続関数 f は上に有界である.

証明: $\epsilon > 0$ とする. f の連続性から,

$$\forall x \in A, \exists \delta(x) > 0 \text{ s.t. } x' \in N(x; \delta(x)) \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \epsilon. \quad (1)$$

さて, 明らかに

$$\bigcup_{x \in A} N(x; \delta(x))$$

は A の開被覆であり, A がコンパクト集合と仮定したから その有限部分被覆

$$\bigcup_{i=1}^k N(x_i; \delta(x_i)) \quad (x_1, x_2, \dots, x_k \in A)$$

が存在する (k をその個数とした). $A \subset \bigcup_{i=1}^k N(x_i; \delta(x_i))$ だから

$$x \in A \Rightarrow \exists x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ s.t. } x \in N(x_i; \delta(x_i))$$

このとき (1) より $f(x) < f(x_i) + \epsilon$ が成り立つ. $M > \max\{f(x_1) + \epsilon, f(x_2) + \epsilon, \dots, f(x_k) + \epsilon\}$ とおけば $x \in A \Rightarrow f(x) < M$ が成り立つ. f は A 上で上に有界である. $\square$

実は次のことも成り立つ (証明を理解してほしい).

定理: コンパクト集合 A 上の連続関数 f は最大値をもつ.

例: 円周や球面上の連続関数には必ず最大値, 最小値が存在する.