

$\mathbf{R}^2$ にいられる距離の例 (by 山田)

距離 は最初から存在しているのではない. 集合に “いれる” もの.
今後, 抽象的な理論は 「集合 X について...」 ではなく
「距離空間 (X, d) について...」 として展開される.

1 ユークリッド距離 d

$$\begin{aligned} d : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

通常 * 単に $\mathbf{R}^2$ とだけ書いて距離についてのコメントがなければ, この距離をいれて距離空間とみなす. それが 「(2次元) ユークリッド平面」.

2 差の絶対値の最大による距離

$$\begin{aligned} d_0 : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}. \end{aligned}$$

3 差の絶対値の和による距離

$$\begin{aligned} d_s : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

4 離散距離 (“同じ点かどうか” しかみない)

$$\begin{aligned} d_r : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } A_1 \neq A_2 \\ 0 & \text{if } A_1 = A_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

どんな集合 X でも 少なくとも 1 つの距離 「離散距離 d_r 」 がいられる.

$$\begin{aligned} d_r : \quad X \times X &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, x') &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq x' \\ 0 & \text{if } x = x' \end{cases}. \end{aligned}$$

6 “串刺しの串” 距離 (どういう発想かわかりますか?)

$$\begin{aligned} d_k : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto \begin{cases} |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{if } x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1| & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

* 距離空間の定義を学習する現代数学入門の講義のような場合 以外 をさす.

1つの集合に2つの距離・位相 (by 山田)

2つの距離空間 (X^0, d_0) , (X^1, d_1) を次のように定める.

$X^0 := \{[-1, 1] \text{ 上の連続関数 } f \text{ で } f(\pm 1) = 0 \text{ をみたすもの}\},$

$$d_0(f, g) := \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - g(x)|$$

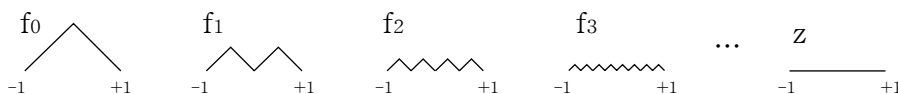
$X^1 := \{[-1, 1] \text{ 上の } C^1 \text{ 級関数 } f \text{ で } f(\pm 1) = 0 \text{ をみたすもの}\},$

$$d_1(f, g) := \max_{x \in [-1, 1]} (|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|)$$

「微分積分学」で学んだ通り, “関数は微分可能なら連続” なので集合 X^1 は X^0 の部分集合: $X^1 \subset X^0$. しかし $X^0 \neq X^1$. つまり X^1 の元ではない X^0 の元が存在する. 例えば 折れ線の関数: $f_0(x) := \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1| - 2|x|)$. もっと折れるのを増やしてみよう.

$S_n := \{ \text{区間 } [-1, +1] \text{ を } 2^n \text{ 等分した各区間の中点} \}$ として

$$f_n(x) := \frac{1}{2} \sum_{t \in S_n} \left(\left| x - \left(t - \frac{1}{2^n} \right) \right| + \left| x - \left(t + \frac{1}{2^n} \right) \right| - 2|x - t| \right)$$

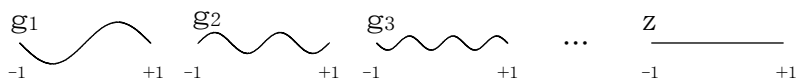


関数 f_n は 微分不可能な点が多いが, 端点 ± 1 を含めないで $(2^{n+1} - 1)$ 個あり, 微分可能な点での微分係数は $+1$ か -1 のどちらか, となっている. また, $f_n(x)$ の区間内での最大値は $\frac{1}{2^n}$.

さて今, 定値ゼロ関数 z ($\forall x, z(x) = 0$) は X^1 の元であり X^0 の元でもある. 距離空間 (X^0, d_0) の中の2点 f_n と z の距離は $d_0(f_n, z) = \frac{1}{2^n}$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = z$ である. 以上のことを確認すると,

「 $\forall n \in \mathbf{N}, f_n \notin X^1$, but $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = z$ in (X^0, d_0) and $z \in X^1$ 」
 「全ての n について f_n は X^0 の元ではあるが X^1 の元ではない,
 しかし (X^0, d_0) の中での極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は X^1 の元 z である。」

また, $g_n(x) = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$ この関数の列は X^1 に含まれている: $\forall n \in \mathbf{N}, g_n \in X^1$.



そして, 次の性質を持っている. 距離空間 (X^1, d_0) を, X^1 の2点間の距離を X^0 の2点とみなして距離 d_0 を用いて定める空間とすると,

「 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = z$ in (X^1, d_0) , but $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ in (X^1, d_1) 」
 「関数列 $\{g_n\}$ は X^1 内で, 距離 d_0 に関して z に収束しているが,
 距離 d_1 に関しては収束すらしていない。」