

群・環・体 など (by 山田)
演算 と 演算を行う集合 の抽象化：一気に定義

1 群

G を集合とし, g を 2つの G の元 x, y から第3の元 $g(x, y)$ を対応させる規則 [演算] とする. 通常, $g(x, y)$ を $x \cdot y$ と略して表す.

$$\begin{aligned} g : G \times G &\rightarrow G, \\ (x, y) &\mapsto g(x, y). \end{aligned}$$

このとき、組 (G, g) について「 (G, g) が**群**である」とは次の3つが成り立つこと：

- (1) [結合法則] $\forall x, y, z \in G, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$
- (2) [単位元の存在] $\exists e \in G$ s.t. $\forall x, \quad e \cdot x = x \cdot e = x.$
 e のことを (G, g) の**単位元**とよび, 1 と表すこともある.
- (3) [任意の元の逆元の存在] $\forall x \in G, \quad \exists x^{-1} \in G$ s.t. $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e.$
 x^{-1} のことを「 x の**逆元**」という.

さらに、群 (G, g) が次の条件をみたすとき、特に (G, g) を**可換群** (アーベル群) という.

(補) [交換法則] $\forall x, y \in G, \quad y \cdot x = x \cdot y.$

可換群を扱うとき, $g(x, y)$ を $x + y$, その単位元 e を 0 , x の**逆元** x^{-1} を $-x$ と表して **加法群**とよぶことがある.

2 環

R を集合とし, 2つの R の元 x, y から第3の元を対応させる規則 [演算] が2つ g (和) と h (積) が与えられているとする. このとき、組 (R, g, h) について「 (R, g, h) が**環**である」とは次の3つが成り立つこと：

- (1) [和の可換性] (R, g) が加法群である.
したがって $g(x, y)$ とは書かず $x + y$ と表し, (R, g) の単位元は 0 , x の逆元は $-x$ と表す. $h(x, y)$ のことは $x \cdot y$ と表す.
- (2) [積の結合性]
 (R, h) に関して 結合法則 をみたす. $\forall x, y, z \in R, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$
- (3) [和積の分配法則] $\forall x, y \in R,$
 $x \cdot (y_1 + y_2) = x \cdot y_1 + x \cdot y_2. \quad (x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y.$

さらに、環 (R, g, h) が次の条件をみたすとき、特に (R, g, h) を**可換環**という.

(補) [積の交換法則] $\forall x, y \in R, \quad y \cdot x = x \cdot y.$

また、環 (R, g, h) が次の条件をみたすとき、

(補) [積の単位元] $\exists e \in R$ s.t. $\forall x, e \cdot x = x \cdot e = x,$

e のことを**単位元**とよび 1 と表す. 単位元 1 をもつ環 (R, g, h) において, 元 x が積について逆元をもつとき(つまり $\exists x^{-1} \in G$ s.t. $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ のとき) x は**可逆元**と呼ばれ, x^{-1} のことを x の**(積の) 逆元**という.

3 体

環 (F, g, h) が, 単位元 1 をもち, 0 以外の全ての元が積の逆元をもつとき「 (F, g, h) が**体**である」という. さらに, 体 (F, g, h) が次の条件をみたすとき **可換体**という.

(補) [積の交換法則] $\forall x, y \in R, \quad y \cdot x = x \cdot y.$

さて, 厳密に記号を全て書くと長くなってしまうので, そろそろ記号を省略していくが, それらは暗黙に了解されているとする(例えば「環 R で...」と書いたら R には2つの演算「和と積 ($+$ と $\cdot$)」がすでに定められていることとする).

4 加群, 線型空間

R が単位元 1 をもつ可換環, M が加法群で R の元 r と M の元 m の組 $(r, m) \in R \times M$ から M の元 $\ell(r, m)$ を対応させる規則 [演算] **(作用)** が与えられているとする.

$$\begin{aligned} \ell : R \times M &\rightarrow M, \\ (x, y) &\mapsto \ell(x, y). \end{aligned}$$

このとき「 M が **R -加群**である」とは次の3つが成り立つこと. R -加群 M に対して, R を M の**係数環**とよぶ. ここで $\ell(r, m)$ のことを略して $r \circ m$ と表す.

- (1) [1 の作用が自明] $\forall m \in M, \quad 1 \circ m = m.$
- (2) [係数の作用] $\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M, \quad r_1 \circ (r_2 \circ m) = (r_1 \cdot r_2) \circ m.$
- (3) [分配法則] $\begin{aligned} \forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M, &\quad (r_1 + r_2) \circ m = r_1 \circ m + r_2 \circ m, \\ \forall r \in R, \forall m_1, m_2 \in M, &\quad r \circ (m_1 + m_2) = r \circ m_1 + r \circ m_2. \end{aligned}$

F -加群 V の係数環 F が体のとき「 V は**(F 上の) 線形空間**である」という.

5 その他に

V が 体 F 上の線形空間で, さらに V 自身が環であり, いくつかの条件 (そのうちの1つを下に挙げる) をみたすとき「 V は F -**代数**である」という.

- (1) [係数と積の可換性]

$$\forall f \in F, \forall v_1, v_2 \in V, \quad (f \circ v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (f \circ v_2) = f \circ (v_1 \cdot v_2).$$