

有理数 $\mathbf{Q}$ と 実数 $\mathbf{R}$ と 複素数 $\mathbf{C}$ そして (by 山田)

有理数 $\mathbf{Q}$ これで全ての数が表せると思っていた時期もあった.

$$\mathbf{Q} := \left\{ r = \frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbf{Z}, p \neq 0 \right\}.$$

ただし $\begin{cases} q = dq' \\ p = dp' \end{cases}$ 又は $\begin{cases} dq = q' \\ dp = p' \end{cases}$ となる $0 \neq d \in \mathbf{Z}$ が存在するとき $\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$ とみなす.

実数 $\mathbf{R}$ きっかけ「 $x^2 = 2$ の解は存在しない, $\mathbf{Q}$ では.」

[$x^2 = 2$ の解を求めようとするアルゴリズム: 1.414213...]]

(0) $a_0 = 1$ とする. 以下 $k = 1, 2, 3, \dots$

(k) $\epsilon_k = \frac{1}{10^k} = 0.0 \cdots 01$ (第 k 位), $b_0 = a_{k-1}$ として次の作業をして a_k を定める.

+ 今 $b_i^2 < 2$ となっているはずである. $b_{i+1} = b_i + \epsilon_k$ (少し増やす) とし

(over) $b_{i+1}^2 > 2$ となったならば $a_k = b_i$ として終了.

(yet) $b_{i+1}^2 < 2$ であるときは, 新たに $b_i := b_{i+1}$ と更新して + へ.

この作業で $\mathbf{Q}$ 内の数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ が作れるが $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は存在しないのだ, $\mathbf{Q}$ では.

[実数の公理] $\mathbf{R}$ 内で 次の 2 条件をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ には極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する.

(1) [単調増加] $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$. (2) [上に有界] $\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $\forall n \in \mathbf{N}, a_n < M$.

実数の集合 $\mathbf{R}$ と 有理数の集合 $\mathbf{Q}$ の決定的な違いを数学用語で言うと:

$\mathbf{R}$ は **連続性** をもつ. or $\mathbf{R}$ は **完備** であるが $\mathbf{Q}$ は完備ではない.

数の発展という意味では, 次のように考えることもできる. これで全部か?

$$\mathbf{R} := \mathbf{Q} \cup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \mid \{a_n\}_{n=1}^\infty \text{ は条件 (1)(2) をみたす } \mathbf{Q} \text{ 内の数列} \right\}.$$

複素数 $\mathbf{C}$ $\mathbf{C} := \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. $\mathbf{C}$ は $\mathbf{R}$ 上 2次元の線形空間 で $\{1, i\}$ が 基底.

計算法則: “ i の文字式と思って計算して, i^2 が出たら -1 に変える”

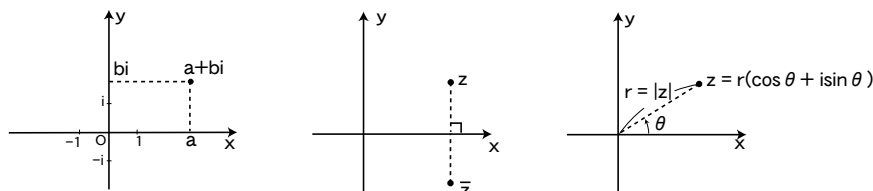
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

幾何解釈: 実数 $\mathbf{R} \longleftrightarrow$ 数直線
複素数 $\mathbf{C} \longleftrightarrow$ 数平面 .

また, マイナス ($-$) は原点に関する対称点とする (図) .

$\mathbf{C}$ の元 $z = a + bi$ (a, b は実数) に対して,

- (1) $a - bi$ を $\bar{z}$ と表し z の 共役 (複素数) という. a を 実部 という (図).
- (2) $\sqrt{a^2 + b^2}$ を $|z|$ と表し z の 絶対値 という (図). $|z|$ は 0 以上の実数であり
 $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ が成り立つ. xy 平面で極座標 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を考える ($r \geq 0$) と,
複素数 z は $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形に表され, $|z| = r$ である.

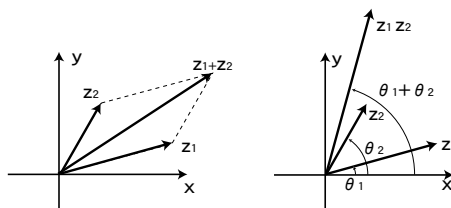


ここで $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ が成り立つ. だから, $z \neq 0$ のとき

$$z^{-1} \left(= \frac{1}{z} \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

- (3) $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ のとき $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
- (4) $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$



- (5) 特に $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ となる. この公式は「絶対値をとる写像

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{R}, \\ z &\mapsto r = |z|. \end{aligned}$$

は群 $(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \times)$ から群 $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ への準同形である」と表現できる. また,

$$\begin{aligned} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) &\cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad [3 \text{ 角関数の和公式}] \end{aligned}$$

$$\text{応用として } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = (\cos \theta - i \sin \theta).$$

注: このプリントは複素数の勉強のために作ったものではない. 4元数体 $\mathbf{H}$ の“より自然な”導入を目的とした.