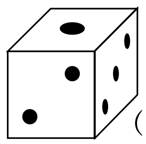
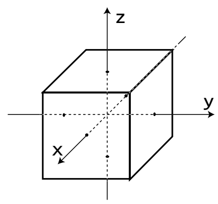
サイコロに作用する群（by 山田）

変換群：図形への群の作用　〜群は対称性を記述する〜

以下では，サイコロの「目」は $\{1,2,3,4,5,6\}$ のどれかであり，向かい合う面の「目」の和は７であるとする．また，ある方向からサイコロを見て 1, 2, 3 が反時計まわり（左図）に見えるサイコロであるとする（逆まわりに見えるものもある）．そしてサイコロは 立方体としては 常に右図のように配置する．つまり重心が原点で，どの面も ３つの座標軸のいずれか に中心で垂直に交わる，とする．





立方体としての配置が同じでも，サイコロとしての配置は違うことがある．

サイコロには「目」があって，面が区別されるからだ．しかし, サイコロ上面の「目」が同じでも, サイコロとしての配置は違うことがまだある．そこで，サイコロの上面の「目」 だけではなく前面の「目」を指定する．そこまですれば, サイコロとしての配置も決まってしまう．

サイコロとしての配置の個数は２４である．

証明：サイコロ上面の「目」 u を決める．これには $\{1,2,3,4,5,6\}$ の６通りある．次にサイコロ前面の「目」 f を決めるが，このとき既に上面として指定された u とその向い（下面）となる $7-u$ はもう選べないので, f の選択は４通りである．u と f を指定すれば, サイコロの配置は決まる．以上により 6×4 で２４通りである．□

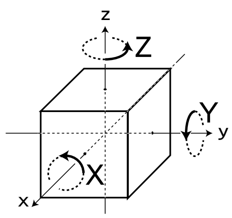
f ＼ u	1	2	3	4	5	6
1	-	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	-
2	**(1,2)**	-	(3,2)	(4,2)	-	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	-	-	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	-	-	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	-	(3,5)	(4,5)	-	(6,5)
6	-	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	-

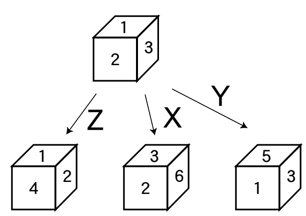
サイコロの配置の変換　サイコロの, 立方体としての配置を変えずに サイコロとしての配置を変える．ただし操作の結果が同じ変換を同じ変換とみなす．基礎的な変換は次の３つ．

Z　：　z 軸（正の向き）を軸とし 右ねじの向きに ９０度回転

X　：　x 軸（正の向き）を軸とし 右ねじの向きに ９０度回転

Y　：　y 軸（正の向き）を軸とし 右ねじの向きに ９０度回転





変換の合成　変換の後に変換を続けることで，いろいろな変換ができる．

規則１：　“変換 x を行なった後で 変換 y を行なう” 変換の合成を yx と記す.
（順序に注意．右から順に変換する）
規則２：　サイコロとしての配置を変えない “変化なし” の変換は1 と記す.
規則３：　１つの変換 x に対し, その逆変換を x^{-1} と記す.

例えば　$X^{-2}Y$　とは次のような変換である．

“y 軸（正の向き）を軸とし 右ねじの向きに ９０度回転した後,
x 軸（正の向き）を軸とし 左ねじの向きに ９０度回転を２回行なう”　変換.

変換の関係式

変換を個別に記述するには，基本配置 $(1, 2)$ にその変換を施したらどの配置になるか を調べるとよい．

例：$Z(1,2) = (1,4)$,　$X(1,2) = (3,2)$,　$Y(1,2) = (5,1)$,　　$X^{-2}Y(1,2) = (2,1)$.

変換の個数は全部で（1 を含めて）２４個あるはずだ．それらを全て X, Y, Z とそれらの積で表すことを考えよう．それには例えば　$X^4 = 1$　（９０度を４回で３６０度＝１回転して元通り）というような “関係式” が重要である．いろいろな関係式を書き出してみよ．
ヒント：立方体のいろいろな 対称性 を読み取ること．

$X^4 = 1$　から　$X^8 = 1$,　$X^{12} = 1, \cdots$　とか　$X^3 = X^{-1}$,　$X^2 = X^{-2}$　なども導かれるため，関係式はたくさんある．しかし 本質的な関係式 はいくつかに限られるだろう．もしかしたら Z が X と Y で表せるということもあるかも知れない．

これについて，いろいろと考えるのが今回の課題である．
その目標は **群の表示** という概念を経験することである．
群の表示は **生成元** と **定義関係式** からなる．
例えば $< a; a^n = 1 >$ は有限巡回群 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ の表示 である．

球面３角形群　この「サイコロの変換群」は「$(2, 3, 4)$ 型の球面３角形群」と呼ばれている．球面３角形群は４種類：$(2, 2, n)$ 型，$(2, 3, 3)$ 型，$(2, 3, 4)$ 型，$(2, 3, 5)$ 型 しかなく，最初の１つを除いて正多面体と関係があり，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$　の（２以上の）自然数解と関係がある．この辺りは幾何学のおもしろいところです.