

## 微分積分学第二 期末試験 (一部) (山田)

**指示:** 別紙の解答用紙に 結論のみでなく解く際の要点を解答すること

**1** 次のそれぞれの重積分を求めよ. ただし (2) は [ ] 内の置換積分を行なうこと.

$$(1) \iint_D x^2 y \, dx dy \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad -x^2 \leq y \leq 2x$$

$$(2) \iint_D (3x + 4y)^2 \, dx dy \quad D: |3x + 4y| \leq 3, \quad |4x - 3y| \leq 1$$

置換 [  $u = 3x + 4y, v = 4x - 3y$  ]

$$(3) \iint_D \frac{y}{9 - x^2 - y^2} \, dx dy \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y$$

$$(4) \iint_{\Delta} x^3 y^3 \, dx dy \quad \Delta: x + y \leq 2, \quad 0 \leq x, y$$

**2** 2変数関数  $f(x, y) = y^3 - 8x^2 - 8xy - 2y^2 - 12y - 9$  と,  
 $xy$ -平面内で  $f(x, y) = 0$  の定める曲線  $C$  について

(1)  $f(x, y)$  の極値を全て求めよ.

(解答は「 $(a, b)$  において極小値  $c$  をとる」を並べる形)

(2) 曲線  $C$  上の点  $(0, -1)$  における接線の式を求めよ.

3  $xy$ -平面内  $x > 0$  の領域で、関数  $f$  と 有向曲線  $C$  を次で定める：

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \begin{array}{lcl} C : [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & c(t) = (x(t), y(t)) \\ & & = (\sqrt{t^2 + 2}, 2t + 1) \end{array}$$

合成関数  $z(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t))$  についても考える.

(1)  $f$  の偏微分  $P = \frac{\partial f}{\partial x}$  および  $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$  を計算せよ.

(2)  $z(t)$  の  $t = -1$  での値  $z(-1)$  を求めよ.

(3)  $z(t)$  の  $t = 0$  での微分係数  $\frac{dz}{dt}(0)$  を求めよ.

(4)  $C$  上の線積分  $\int_C Pdx + Qdy$  を求めよ.

4 各問に答えよ.

(1) 空間の極座標変換

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad (0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

の極座標変換のヤコビ行列式  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$  を答えよ. (計算不要)

(2) 1 変数の広義積分  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  の値を答えよ. (計算不要)

(3)  $I(a) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(ax)}{x} dx$  とするとき  $\frac{dI}{da}(1)$  を求めよ.

(4) 原点を中心とする半径 1 の球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  のうち 2 つの平面  $z = a, z = b$  に挟まれた部分の面積  $S$  を求めよ. ただし  $-1 \leq a < b \leq 1$  とする.

以上

微分積分学第二 期末試験 (一部) 解説 (山田)

1 重積分

$$(1) \iint_D x^2 y \, dx dy \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad -x^2 \leq y \leq 2x$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{y=-x^2}^{y=2x} x^2 y \, dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=-x^2}^{y=2x} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^2 (2x)^2 - \frac{1}{2} x^2 (-x^2)^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 2x^4 - \frac{1}{2} x^6 \right) dx = \left[ \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{14} x^7 \right]_0^1 = \frac{23}{70} \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D (3x + 4y)^2 \, dx dy \quad D: |3x + 4y| \leq 3, \quad |4x - 3y| \leq 1$$

置換 [  $u = 3x + 4y, v = 4x - 3y$  ]

1 次変換  $\begin{cases} u = 3x + 4y \\ v = 4x - 3y \end{cases}$  ヤコビ行列式は  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25$  なので

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = -\frac{1}{25}. \quad \text{よって } dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{25} du dv$$

(絶対値に注意)

積分領域の変換は  $E: |u| \leq 3, \quad |v| \leq 1$ .

$$\begin{aligned} I &= \iint_E u^2 \frac{1}{25} du dv = \frac{1}{25} \int_{-1}^1 dv \int_{-3}^3 u^2 du = \frac{1}{25} \cdot 2 \cdot 2 \int_0^3 u^2 du \\ &= \frac{4}{25 \cdot 3} [u^3]_0^3 = \frac{36}{25} \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D \frac{y}{9 - x^2 - y^2} \, dx dy \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y$$

平面の極座標  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  を用いる.  $E: 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{y}{9 - x^2 - y^2} = \iint_E \frac{r \sin \theta}{9 - r^2} r \, dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_1^2 \left( -1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3 + r} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3 - r} \right) dr \\ &= 2 \left[ -r + \frac{3}{2} \log \frac{3 + r}{3 - r} \right]_{r=1}^{r=2} = 3 \log \frac{5}{2} - 2 \end{aligned}$$

$$(4) \iint_\Delta x^3 y^3 \, dx dy \quad \Delta: x + y \leq 2, \quad 0 \leq x, y$$

先に 単位 3 角形  $\triangle_0 : x + y \leq 1, 0 \leq x, y$  の場合を計算する.

$$\iint_{\triangle_0} x^3 y^3 dx dy = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} x^3 y^3 dy = \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx = \frac{1}{4} B(4, 5)$$

ベータ関数  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  (教科書 p134) について

$$B(4, 5) = B(5, 4) = \frac{3}{5} B(6, 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} B(7, 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{7} B(8, 1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}$$

元の計算に戻る.  $x = 2u, x = 2v$  で変換する.  $dx dy = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} du dv = 2^2 du dv$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\triangle} x^3 y^3 dx dy = \iint_{\triangle_0} (2u)^3 (2v)^3 2^2 du dv = 2^8 \iint_{\triangle_0} u^3 v^3 du dv \\ &= 2^8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{35} \end{aligned}$$

## 2 極値 (基本問題)

## 3 合成関数・線積分

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}, & C : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & t &\mapsto c(t) = (x(t), y(t)) \\ & & &= (\sqrt{t^2 + 2}, 2t + 1) \end{aligned}$$

$$(1) P = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$(2) \text{ 合成関数 } z(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t)) \text{ について } c(-1) = (x(-1), y(-1)) = (\sqrt{3}, -1)$$

$$z(-1) = f(x(-1), y(-1)) = f(\sqrt{3}, -1) = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{具体的に求めると } z(t) = \text{Tan}^{-1} \frac{2t + 1}{\sqrt{t^2 + 2}}$$

(3) 合成関数の微分公式を用いる方が早い.

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(0)) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(0)) \cdot \frac{dy}{dt}(0)$$

$$\text{必要な値を準備する} \quad c(0) = (x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(0)) = \frac{-1}{\sqrt{2}^2 + (-1)^2} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(c(0)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(t^2 + 2)^{-1/2} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}}, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 2$$

$$\text{よって } \frac{dz}{dt}(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

具体的に求めると

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{1}{1 + \frac{(2t+1)^2}{t^2+2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{t^2+2} - (2t+1) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}}{t^2+2} \\ &= \frac{2(t^2+2) - (2t+1)t}{(t^2+2 + (2t+1)^2)\sqrt{t^2+2}} \end{aligned}$$

#### (4) 線積分の計算

概要:  $x$  は  $x(t)$  に、 $dx$  は  $\frac{dx}{dt}dt$  ( $y$  も同様) に、それぞれ置き換える.

$$x \rightsquigarrow x(t), \quad y \rightsquigarrow y(t), \quad dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dt}(t) dt, \quad dy \rightsquigarrow \frac{dy}{dt}(t) dt$$

定義通りに計算すれば良い. この問題の積分は、実は  $\int_{-1}^1 \frac{dz}{dt}(t) dt$ .

微分の積分で“元に戻って”「終点での値－始点での値」になる ( $\text{Tan}^{-1}$  の範囲に注意).

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \left( = \int_C df \right) \\ &= f(c(1)) - f(c(-1)) \\ &= \text{Tan}^{-1} \sqrt{3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

#### 4 小問集

(1), (2) これらは、数学には珍しく 暗記でも良いくらい重要.

(1) 空間の極座標のヤコビ行列式  $r^2 \sin \theta$

(2) 正規分布の積分 (の半分)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(3) 積分記号下の微分 と呼ばれる計算 「微分が積分の中に入る」

$$I(a) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(ax)}{x} dx \text{ について}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da}(a) &= \frac{d}{da} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(ax)}{x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\cos(ax)}{x} \right) dx \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} -\sin(ax) dx = \left[ \frac{\cos(ax)}{a} \right]_{x=\pi/4}^{x=\pi/3} \\ &= \frac{1}{a} \left( \cos \frac{a\pi}{3} - \cos \frac{a\pi}{4} \right) \\ \frac{dI}{da}(1) &= \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(4) 回転体の面積 (p131) の公式：

曲線  $y = f(x) > 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) を  $x$  軸を軸に回転した曲面の面積は

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  の場合

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad 1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$|f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$$

なので求める面積は  $2\pi(b - a)$ . 確認： $b = 1, a = -1$  のとき、球面積  $4\pi$  に一致.

以上