Web サイト用 (2023)

微分積分学第二　期末試験（一部）　（山田）

指示：出題によっては “説明” も 部分点として採点します． ただし解答用紙は追加しません．（計算ではなく）要点を解答すること．

$\boxed{1}$ 次のそれぞれの重積分を求めよ．

(1) 〜 (3)　　定番の基本問題のため 省略

(4) $\displaystyle\iint_{\triangle} x^4y^4\,dxdy \qquad \triangle:\ x+y \leqq 3,\ \ 0 \leqq x, y$

$\boxed{2}$ xy-平面内 $x>0$ の領域で，関数 f と 有向曲線 C を次で定める：

$$f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$$\begin{array}{rccc} C: & [\,-1,\sqrt{3}\,] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & c(t) = (x(t), y(t)) = (\ e^{2t},\ te^{2t}\ ) \end{array}$$

合成関数 $z(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t))$ についても考える．

(1) f の偏微分　$P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$　および　$Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$　を計算せよ．

(2) $z(t)$ の $t=1$ での値 $z(1)$ を求めよ．

(3) $z(t)$ の $t=1$ での微分係数　$\dfrac{dz}{dt}(1)$　を求めよ．

(4) C 上の線積分　$\displaystyle\int_C Pdx + Qdy$　を求めよ．

解答用紙・解答欄に注意：15 分早く回収

$\boxed{3}$ 各問に答えよ.

(1) 空間の極座標変換

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad (0 \le r, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を答えよ. (計算不要)

(2) 1 変数の広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}\,dx$ の値を答えよ.

(3) $I(a) = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ とするとき $\dfrac{dI}{da}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(4) 2つの正の実数 x, y が条件 $x^3 + y^5 = 1$ を満たして動くとき x^2y の最大値を与える x の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 極値，陰関数の微分，陰関数のテーラー展開など．前半（多変数の微分）の復習.

基本問題のため 省略

以上

微分積分学第二　期末試験（一部）　解説（山田）

$\boxed{1}$ 重積分

(4) $\displaystyle\iint_{\triangle} x^4y^4\,dxdy \quad \triangle:\ x+y \leqq 3,\ \ 0 \leqq x, y$

先に 単位３角形 $\triangle_0 : x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x, y$ の場合を計算する.（レポート課題だった）

$$\iint_{\triangle_0} x^4y^4\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} x^4y^4\,dy = \frac{1}{5}\int_0^1 x^4(1-x)^5\,dx = \frac{1}{5}B(5,6)$$

ベータ関数 $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$（教科書 p134）について

$$B(5,6) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(6)}{\Gamma(5+6)} = \frac{4!\cdot 5!}{10!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}$$

元の計算に戻る（3 の何乗か？）. $x = 3u, x = 3v$ で変換する.　　　答：10 乗

$$dxdy = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} dudv = 3^2\,dudv$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\triangle} x^4y^4\,dxdy = \iint_{\triangle_0} (3u)^4(3v)^4\,3^2\,dudv = 3^{10}\iint_{\triangle_0} u^4v^4\,dudv \\ &= 3^{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \boxed{\frac{6561}{700}} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 合成関数・線積分

$$f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$$\begin{aligned} C:\ \ [\,-1, \sqrt{3}\,] &\ \to\ \mathbb{R}^2 \\ t &\ \mapsto\ c(t) = (x(t), y(t)) = (\ e^{2t},\ te^{2t}\ ) \end{aligned}$$

(1) $P = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2},\quad Q = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$　　（領域 $x > 0$）

解説：実は $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$.　　極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いると

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta,\quad \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

であり

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}(\sin\theta) = \theta,\quad \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{Tan}^{-1}(\tan\theta) = \theta.$$

領域 $x > 0$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対応する.

(2) 合成関数 $z(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t))$ について　$c(1) = (x(1), y(1)) = (e^2, e^2)$

$$z(1) = f(x(1), y(1)) \;= f(e^2, e^2) \;= \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \;= \frac{\pi}{4}$$

具体的に求めると $z(t) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \;= \mathrm{Tan}^{-1}t.$

(3) 合成関数の微分公式を用いる方が早い.　$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{dz}{dt}(1) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(c(1))\cdot\frac{dx}{dt}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(1))\cdot\frac{dy}{dt}(1)$$

必要な値を準備する　$c(1) = (x(1), y(1)) = (e^2, e^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(1)) = \frac{-e^2}{(e^2)^2 + (e^2)^2} = -\frac{1}{2e^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(c(1)) = \frac{e^2}{(e^2)^2 + (e^2)^2} = \frac{1}{2e^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t},\ \frac{dx}{dt}(1) = 2e^2, \qquad \frac{dy}{dt} = e^{2t} + 2te^{2t},\ \frac{dy}{dt}(1) = 3e^{2t}$$

よって $\dfrac{dz}{dt}(0) \;=\; -\dfrac{1}{2e^2}\cdot 2e^2 + \dfrac{1}{2e^2}\cdot 3e^{2t} \;= -1 + \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

具体的に求めれば　$\dfrac{dz}{dt}(t) = \dfrac{1}{1+t^2},\ \dfrac{dz}{dt}(1) = \dfrac{1}{2}.$

(4) 線積分の計算

概要： x は $x(t)$ に、dx は $\dfrac{dx}{dt}dt$（y も同様）に、それぞれ置き換える.

$$x \rightsquigarrow x(t),\ y \rightsquigarrow y(t), \quad dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dt}(t)\,dt, \quad dy \rightsquigarrow \frac{dy}{dt}(t)\,dt$$

定義通りに計算すれば良い.　この問題の積分は 実は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dz}{dt}(t)\,dt.$

微分の積分は “元に戻る” 原理で「終点での z の値 − 始点での z の値」になる.
Sin^{-1} や Tan^{-1} の範囲に注意：$x > 0$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対応する.

$$\begin{aligned}
\int_C P\,dx + Q\,dy \;&=\; \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \left(= \int_C df\right)\\
&=\; f(c(\sqrt{3})) - f(c(-1))\\
&=\; z(\sqrt{3}) - z(-1)\\
&=\; \mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\frac{-1}{\sqrt{2}} \;= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \;= \boxed{\frac{7\pi}{12}}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 小問集

(1), (2) これらは、数学には珍しく 暗記でも良いくらい重要.

(1) 空間の極座標のヤコビ行列式 $\boxed{r^2 \sin\theta}$

(2) 正規分布の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \quad (x = 2u \text{ で置換積分})$$

(3) 積分記号下の微分 と呼ばれる計算「微分が積分の中に入る」

$I(a) = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ について

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{da}(a) &= \frac{d}{da}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(ax)}{x}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cos(ax)}{x}\right)dx \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(ax)\,dx = \left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} = \frac{1}{a}(\sin 2a\pi - \sin a\pi) \\
\frac{dI}{da}\Big(\frac{1}{2}\Big) &= 2\Big(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\Big) = \boxed{-2}
\end{aligned}$$

(4) ラグランジュの未定乗数法： 条件 $x^3 + y^5 = 1$ を満たして動くとき x^2y の最大値

$$F(x, y, \lambda) = x^2y - \lambda(x^3 + y^5 - 1) \text{ とおく.}$$

$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_\lambda = 0 \end{cases}$ つまり $\begin{cases} 2xy - 3\lambda x^2 = 0 \\ x^2 - 5\lambda y^4 = 0 \\ x^3 + y^5 = 1 \end{cases}$ を解く．上の２式から $2x^2y = 3\lambda x^3 = 10\lambda y^5.$

$\lambda = 0$ は $x = y = 0$ となり不適当なので $\lambda \neq 0$ とする．$3x^3 = 10x^5$. $x^3 + y^5 = 1$ と連立して $x^3 = \dfrac{10}{13}, y^5 = \dfrac{3}{13}$. $\boxed{x = \sqrt[3]{\dfrac{10}{13}}}$

補足：この後，厳密に増減を確かめる方法もある（授業で説明した通り）が，当面，
解の存在が ほぼ明白な場合に “素早く解を見つける方法” として，これが第一歩.

以上