微分積分学第二　期末試験（山田）

指示：別紙の解答用紙に 結論のみでなく解く際の要点を解答すること

$\boxed{1}$ 次のそれぞれの重積分を求めよ．ただし (2) は [ ] 内の置換積分を行なうこと．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dxdy$ 　　$D: 0 \leqq x \leqq 1,\quad -2x \leqq y \leqq x^2$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy$ 　　$D:\ |x|+|y| \leqq \pi$
置換 $[\ u = x+y,\ v = x-y\ ]$

(3) $\displaystyle\iint_D \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy$ 　　$D:\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_\triangle x^5y^5\,dxdy$ 　　$\triangle:\ x+y \leqq 2,\ \ 0 \leqq x, y$

$\boxed{2}$ xy-平面内 $x>0$ の領域で，関数 f と 有向曲線 C を次で定める：

$$f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$$\begin{array}{rcll} C:\ [\,0,1\,] & \to & \mathbb{R}^2 & \\ t & \mapsto & c(t) = (x(t), y(t)) & \\ & & \quad = \left(-3t^2+2t+2,\ \sqrt{3}(3t-2)+4\sin\pi t\right) & \end{array}$$

合成関数 $z(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t))$ についても考える．

(1) f の偏微分 $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $z(t)$ の $t=\frac{2}{3}$ での値 $z(\frac{2}{3})$ を求めよ．

(3) $z(t)$ の $t=\frac{2}{3}$ での微分係数 $\dfrac{dz}{dt}(\frac{2}{3})$ を求めよ．

(4) C 上の線積分 $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy$ を求めよ．

解答用紙・解答欄に注意：15 分早く回収

$\boxed{3}$ 各問に答えよ.

(1) 空間の極座標変換

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad (0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を答えよ. (計算不要)

(2) １変数の広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2+4x}\,dx$ の値を答えよ.

(3) $I(a) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ とするとき $\dfrac{dI}{da}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ.

(4) ２つの正の実数 x, y が条件 $xy + x + y = 1$ を満たして動くとき,
x^2y の最大値を与える x の値を求めよ.

$\boxed{4}$ ２変数関数 $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 4$ と,
xy-平面内で $f(x,y) = 0$ の定める曲線 C について

(1) $f(x,y)$ の極値を全て求めよ.
（解答は「(a,b) において極大値（or 極小値） c をとる」を並べる形）

(2) 曲線 C 上の点 $(\sqrt{2}, 0)$ における接線の式を求めよ.

(3) $f(x,y) = 0$ の, $(\sqrt{2}, 0)$ の近くで定まる陰関数 $\varphi(x)$ について,
$x = \sqrt{2}$ での２次微分係数 $\varphi''(\sqrt{2})$ を求めよ.

(4) $f(x,y) = 0$ の, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ の近くで定まる陰関数 $\psi(x)$ について,
$x = \sqrt{2}$ での２次微分係数 $\psi''(\sqrt{2})$ を求めよ.

以上