微分積分学第二　期末試験　解説（山田）

$\boxed{1}$ 重積分

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dxdy \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1, \quad -2x \leqq y \leqq x^2 \qquad D$ は下図（左）

$$I = \int_0^1 dx \int_{y=-x^2}^{y=2x} x^2y^2\,dy$$

$$\left[\frac{1}{3}x^2y^3\right]_{y=-2x}^{y=x^2} = \frac{1}{3}x^2(x^2)^3 - \frac{1}{3}x^2(-2x)^3 = \frac{1}{3}(x^8+8x^5)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^8+8x^5)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{9}x^5+\frac{4}{3}x^6\right]_0^1 = \boxed{\frac{13}{27}}$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy \qquad D:\ |x|+|y| \leqq \pi \qquad$ 置換 $[\ u=x+y,\ v=x-y\ ]$

D は下図（中）

1次変換 $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ ヤコビ行列式 は $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ なので

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = -\dfrac{1}{2}$. よって $dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \dfrac{1}{2}\,dudv$

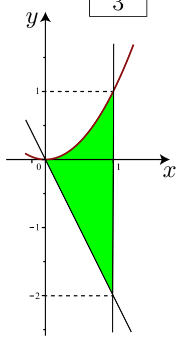
（絶対値に注意）

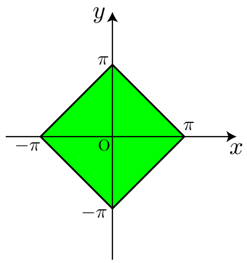
積分領域の変換は　$E:\ |u| \leqq \pi, \quad |v| \leqq \pi.$

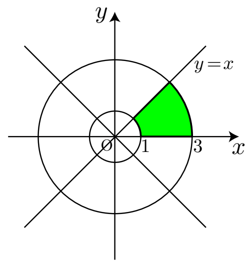
$$I = \iint_E v^2\,\cos^2 u \cdot \frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} v^2\,dv \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi} v^2\,dv \cdot 2\int_0^{\pi}\cos^2 u\,du = 2\cdot\left[\frac{1}{3}v^3\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\cos 2u\right]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{\pi^4}{3}}$$







(3) $\displaystyle\iint_D \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy \qquad D:\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq x \qquad D$ は下図（右）

平面の極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いる．$E: 1 \leqq r \leqq 3,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}.$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で　$\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}(\tan\theta) = \theta$

$$I = \iint_D \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy = \iint_E \theta\cdot r\,drd\theta = \int_1^3 r\,dr\cdot\int_0^{\pi/4}\theta\,d\theta$$

$$= \int_1^3 r\,dr\cdot\int_0^{\pi/4}\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^3\cdot\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi/4} = 4\cdot\frac{\pi^2}{32} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

(4) $\displaystyle\iint_\triangle x^5y^5\,dxdy \qquad \triangle:\ x+y \leqq 2,\quad 0 \leqq x, y$

先に 単位3角形 $\triangle_0 : x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x, y$ の場合を計算する．

$$\iint_{\triangle_0} x^5y^5\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{y=0}^{y=1-x} x^5y^5\,dy = \frac{1}{6}\int_0^1 x^5(1-x)^6\,dx = \frac{1}{6}B(6,7)$$

ベータ関数 $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ と ガンマ関数の関係式，$\Gamma(n) = (n-1)!$
を利用する（教科書 p133, 134）．

$$B(6,7) = \frac{\Gamma(6)\cdot\Gamma(7)}{\Gamma(13)} = \frac{5!\cdot 6!}{12!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11}$$

元の計算に戻る．$x=2u, x=2v$ で変換する．$dxdy = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} dudv = 2^2\,dudv$

$$I = \iint_\triangle x^5y^5\,dxdy = \iint_{\triangle_0}(2u)^5(2v)^5\cdot 2^2\,dudv = 2^{12}\iint_{\triangle_0} u^5v^5\,dudv$$

$$= 2^{12}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11} = \frac{2^8}{3^3\cdot7\cdot11} = \boxed{\frac{256}{2079}}$$

$\boxed{2}$ ［合成関数・線積分］

xy-平面内 $x>0$ の領域で，関数 f と 有向曲線 C $(=c(t))$ を次で定める：

$$f(x,y)=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad c(t)=(-3t^2+2t+2,\sqrt{3}(3t-2)+4\sin\pi t)$$

合成関数 $z(t)=f(c(t))=f(x(t),y(t))$ についても考える．

解説

・極座標 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ を考えると $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta$ となる．

$x>0$ の範囲は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ に対応して，$\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{Sin}^{-1}(\sin\theta)=\theta$ となる．

$f(x,y)$ は 平面の点 (x,y) に対して偏角 θ を返す関数である．

始点 $t=0$ のとき $c(0)=(2,-2\sqrt{3})$ で $z(0)=f(2,-2\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$,

$t=\dfrac{2}{3}$ のとき $c(\frac{2}{3})=(2,2\sqrt{3})$ で $z(\frac{2}{3})=f(2,2\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$,

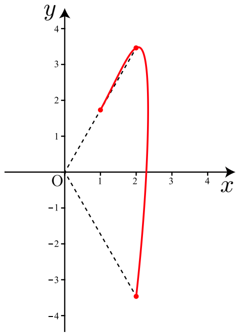
終点 $t=1$ のとき $c(1)=(1,\sqrt{3})$ で $z(1)=f(1,\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$ 　　下図参照

・合成関数 $z(t)=f(c(t))=f(x(t),y(t))$ の問題ではあるが，合成関数 それ自体は問われていない．特定の値 $t=t_1$ での値を求める場合は「合成関数の微分の公式」が便利．

解答 (1) $\boxed{P=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}}$ 　(2) $\boxed{z\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(2,2\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}}$

(3) $\boxed{\dfrac{dz}{dt}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{8}}$ 　(4) 線積分の値 $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

詳細は次頁から解説する．



曲線 C の図

詳細

(1) $f(x,y)=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 偏導関数

$(\mathrm{Sin}^{-1}t)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ なので，まず次を計算しておく

$$\begin{aligned}1-\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2&=1-\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\\ \sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}&=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(x>0)\end{aligned}$$

他にもいくつか準備する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)&=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)&=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2\ -y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\\ &=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\end{aligned}$$

これらを組み合わせる．

$$\begin{aligned}P=\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\cdot\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\\ &=\frac{-y}{x^2+y^2}\\ Q=\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\\ &=\frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

(3) 合成関数の微分公式を思い出す　　覚え方：$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{dz}{dt}(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\big(c(t)\big)\cdot\frac{dx}{dt}\big(t\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(c(t)\big)\cdot\frac{dy}{dt}\big(t\big)$$

特定の値 $t=t_1$ での微分係数を求める場合は，値を代入しながら計算するとよい．

$$\frac{dz}{dt}(\tfrac{2}{3}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\big(c(\tfrac{2}{3})\big)\cdot\frac{dx}{dt}\big(\tfrac{2}{3}\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(c(\tfrac{2}{3})\big)\cdot\frac{dy}{dt}\big(\tfrac{2}{3}\big)$$

必要な値を準備する　　$c(\tfrac{2}{3})=\big(x(\tfrac{2}{3}),y(\tfrac{2}{3})\big)=(2,2\sqrt{3})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(\tfrac{2}{3}))=\frac{-2\sqrt{3}}{2^2+(2\sqrt{3})^2}=-\frac{\sqrt{3}}{8},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(c(\tfrac{2}{3}))=\frac{2}{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(-3t^2+2t+2)=-6t+2, &\frac{dx}{dt}(\tfrac{2}{3})=-2,\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(\sqrt{3}(3t-2)+4\sin\pi t)=3\sqrt{3}+4\pi\cos\pi t, &\frac{dy}{dt}(\tfrac{2}{3})=3\sqrt{3}-2\pi\end{aligned}$$

よって　$\dfrac{dz}{dt}(\tfrac{2}{3}) \;=\; -\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot(-2)+\dfrac{1}{8}\cdot(3\sqrt{3}-2\pi)=\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{8}$

(4)［線積分］（合成関数の微分）

概要：x は $x(t)$ に、dx は $\dfrac{dx}{dt}dt$（y も同様）に、それぞれ置き換える．

$$x \rightsquigarrow x(t),\; y \rightsquigarrow y(t),\quad dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dt}(t)\,dt,\quad dy \rightsquigarrow \frac{dy}{dt}(t)\,dt$$

この方式で計算すれば良い．この問題の積分は実は $\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{dt}(t)\,dt\;\;(=z(1)-z(0))$.

微分の積分で "元に戻って" 「終点での値 − 始点での値」になる（Sin^{-1} の範囲に注意）．

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx+Q\,dy &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \left(=\int_C df\right)\\ &= f(c(1))-f(c(0))\\ &= \frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 小問集

(1) 数学には珍しく 暗記でも良いくらい重要.　空間の極座標のヤコビ行列式 $\boxed{r^2\sin\theta}$

(2) まず 重要な知識として $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$　（求め方の確認を ぜひ）

$-4x^2+4x=-(2x+1)^2+1$　なので　$e^{-4x^2+4x}=e^{-(2x+1)^2+1}=e\cdot e^{-(2x+1)^2}$

$t=2x+1$ で置換積分する：$dt=2dx$（よって $dx=\dfrac{1}{2}dt$），

x	$-\infty \to \infty$
t	$-\infty \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4x^2+4x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(2x+1)^2+1}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e\cdot e^{-t^2}\,\frac{1}{2}dt=\frac{e}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\boxed{\frac{e\sqrt{\pi}}{2}}$$

(3) 積分記号下の微分 と呼ばれる計算「微分が積分の中に入る」

$I(a)=\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ について

$$\begin{aligned}\frac{dI}{da}(a) &= \frac{d}{da}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx \;=\; \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)\,dx\\ &= \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(ax)\,dx \;=\; \left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} \;=\; \frac{1}{a}\left(\sin a\pi-\sin\frac{a\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{dI}{da}\left(\frac{1}{3}\right) \;=\; 3(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}) \;=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\;=\;\boxed{\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

(4)［ラグランジュの未定乗数法］　$F(x,y;\lambda)=x^2y-\lambda(xy+x+y-1)$　とおく.

$\begin{cases}F_x=0\\ F_y=0\\ F_\lambda=0\end{cases}$ を解く. $\begin{cases}2xy-\lambda(y+1)=0 & \cdots\text{(i)}\\ x^2-\lambda(x+1)=0 & \cdots\text{(ii)}\\ xy+x+y=1 & \cdots\text{(iii)}\end{cases}$ $\begin{cases}2xy=\lambda(y+1) & \cdots\text{(i)'}\\ x^2=\lambda(x+1) & \cdots\text{(ii)'}\end{cases}$

(i)' と (ii)' を 左辺と右辺を交代して 積 をとると　$2xy(x+1)\lambda=x^2(y+1)\lambda$.

$\lambda\neq 0,\ x\neq 0$ なので　$2y(x+1)=x(y+1)$, 整理して $xy=x-2y$.

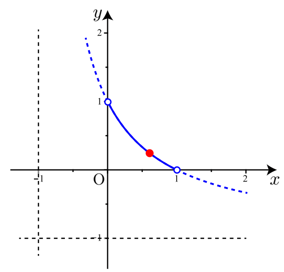
(iii) の変形 $xy=1-x-y$ と合わせて $x-2y=1-x-y$, 整理して $y=2x-1$.

もう１度 (iii) から $x(2x-1)+x+(2x-1)=1$,

整理して $x^2+x-1=0$.

$0<x<1$ に注意して解くと $\boxed{x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

極大であることは別途 調べる.



$\boxed{4}$ ［極値・陰関数］　標準問題

(1) $\boxed{(\pm1,\pm1)\text{ で極小値 }-5\text{ をとる}}$　(2) $\boxed{y = 2x - 2\sqrt{2}}$

(3) $\boxed{\varphi''(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}}$　(4) $\boxed{\psi''(\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}}$

解説

(1) $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 4$ の極値 （2 変数関数の極値）

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \text{を解く．} \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 & \cdots \text{(i)} \\ -4x + 4y = 0 & \cdots \text{(ii)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x^3 & \cdots \text{(i)'} \\ y = x & \cdots \text{(ii)'} \end{cases}$$

(i)', (ii)' から $x^3 = x$ となり $x = 0, \pm1$ を得る．

(ii)' に代入して 停留点が 3 つ得られる $(0,0), (-1,-1), (1,1)$.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D(x,y) = \det H(x,y) = 16(3x^2 - 1)$$

とおく．(a) $(0,0)$ のとき．$D(0,0) = -16 < 0$ となるので極値をとらない．(b) $(\pm1,\pm1)$ のとき．$D(\pm1,\pm1) = 16\cdot 2 > 0$ であり，$f_{xx}(\pm1,\pm1) = 12 > 0$ なので極小値をとる．

答 $\boxed{(-1,-1)\text{ と }(1,1)\text{ で極小値 }-5\text{ をとる．}}$

・陰関数　$f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 4 = 0$　の陰関数 $y = \varphi(x)$ について

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{4x^3 - 4y}{-4x + 4y} = \frac{x^3 - y}{x - y}$$

［別解］$y = y(x)$ に注意して 関係式 を x で微分．(y の微分は y'. $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d}{dy}$ 利用)

$$4x^3 - 4y - 4xy' + 4yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^3 - y}{x - y}$$

(2) $(\sqrt{2}, 0)$ において $y' = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.　接線の式 は $\boxed{y = 2x - 2\sqrt{2}}$

(3) 陰関数の微分の公式を用いる．　$(\sqrt{2}, 0)$ の近くでの陰関数 $y = \varphi(x)$ について

$$\frac{d^2\varphi}{d^2x} = -\frac{f_{xx}(f_y)^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(f_x)^2}{(f_y)^3}$$

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 4y \\ f_y &= -4x + 4y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2 \\ f_{xy} &= -4 \\ f_{yy} &= 4 \end{aligned} \quad \text{から} \quad \begin{aligned} f_x(\sqrt{2},0) &= 8\sqrt{2} \\ f_y(\sqrt{2},0) &= -4\sqrt{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{xx}(\sqrt{2},0) &= 24 \\ f_{xy}(\sqrt{2},0) &= -4 \\ f_{yy}(\sqrt{2},0) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(\sqrt{2}) &= -\frac{24\cdot(-4\sqrt{2})^2 - 2\cdot(-4)\cdot(8\sqrt{2})\cdot(-4\sqrt{2}) + 2\cdot(8\sqrt{2})^2}{(-4\sqrt{2})^3} \\ &= \boxed{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

［別解］$y = y(x)$ に注意して 関係式 をもう 1 回 x で微分．(y' はそのままでよい)

$$12x^2 - 4y' - 4y' - 4xy'' + 4(y')^2 + 4yy'' = 0,$$
$$y'' = \frac{3x^2 - 2y' + (y')^2}{x - y}$$

$(x,y) = (\sqrt{2}, 0)$ および $y' = 2$ を代入する．

$$y'' = \frac{3(\sqrt{2})^2 - 2\cdot 2 + 2^2}{\sqrt{2} - 0} = 3\sqrt{2}. \quad \boxed{y'' = \varphi''(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}}$$

(4) 注目する点を変更する．同じ公式を用いる．

$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ の近くでの陰関数 $y = \psi(x)$ について，$y' = \psi'(x) = 0$ となり，

$\boxed{y'' = \psi''(\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}}$

以上