

微分積分学第二 中間試験 (一部) (山田)

出題によっては“説明”も部分点として採点します。ただし
解答用紙は追加しません。(計算ではなく)要点を解答すること。

- 1 次のそれぞれの関数 f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ および $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

ただし、定義域は $x, y > 0$ とする。

$$(1) f(x, y) = \log(1 + xy^3 + y^4) \qquad (2) f(x, y) = \text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

- 2 関数 $f(x, y) = (e + 3x)^{y+2}$ について

- (1) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での高階の偏微分係数

$$c_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad c_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \text{および}$$
$$c_{20} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad c_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad c_{02} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0, 0)$$

を求めよ。

- (2) xyz -空間内で、 $z = f(x, y)$ が定める曲面の $(0, 0, e^2)$ での接平面の式を求めよ。

- (3) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ でのテーラー展開を 2 次の項まで求めよ。

(剰余項の記述は省略してよい。 例：1 変数 e^x の場合でいえば「 $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ 」)

3 次の2変数関数の極値をすべて求めよ.

注: 解答は「 (a, b) において極 (大 or 小) 値 c をとる」を並べること.

$$f(x, y) = 3x^3 + 4xy^2 + 9x^2 - 4y^2$$

4 2変数関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 20$$

とし, xy 平面内で $g(x, y) = 0$ が定める曲線を C とする.

(1) 曲線 C 上の点 $(0, -2)$ における接線の式を求めよ.

(2) 曲線 C 上で, $f(x, y) = y - x$ の極大値を求めよ.

注: $g(x, y) = g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0$ となる点は存在しない.

以上

[1] 偏微分の計算問題 (領域: $x, y > 0$)(1) $f(x, y) = \log(1 + xy^3 + y^4)$ について

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{1 + xy^3 + y^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2 + 4y^3}{1 + xy^3 + y^4} = \frac{(3x + 4y)y^2}{1 + xy^3 + y^4}$$

(2) $f(x, y) = \tan^{-1} \sqrt{\frac{y}{x}}$ について $\sqrt{\frac{y}{x}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ を利用すると良い

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(x+y)} \end{aligned}$$

[2] テーラー展開 $f(x, y) = (e + 3x)^{y+2}$ について $\log f = (y + 2) \log(e + 3x)$ として対数微分する.例えば, y による微分は $\frac{f_y}{f} = \log(e + 3x)$ から $f_y = f \cdot \log(e + 3x)$

$$\begin{aligned} f_x &= 3(y + 2)(e + 3x)^{y+1} & f_{xx} &= 3^2(y + 2)(y + 1)(e + 3x)^y \\ f_y &= f \cdot \log(e + 3x) & f_{xy} &= f_x \cdot \log(e + 3x) + \frac{3f}{e + 3x} \\ & & f_{yy} &= f_y \cdot \log(e + 3x) = f \cdot \{\log(e + 3x)\}^2 \end{aligned}$$

(1) $(0, 0)$ での値を求めると

$$f(0, 0) = e^2, \quad \begin{aligned} f_x(0, 0) &= 6e & f_{xx}(0, 0) &= 18 \\ f_y(0, 0) &= e^2, & f_{xy}(0, 0) &= 9e \\ & & f_{yy}(0, 0) &= e^2 \end{aligned}$$

(3) 解答は

$$e^2 + 6ex + e^2y + 9x^2 + 9exy + \frac{1}{2}e^2y^2 + \dots$$

 $f(x, y)$ の $(0, 0)$ でのテーラー展開をボリシーは $a_{ij} = x^i y^j$ の係数.

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

とすると、係数の公式は

特に、2 次の係数の $\frac{1}{2}$ などに注意

$$a_{ij} = \frac{1}{i!j!} f_{x^i \dots x^i y^j \dots y^j}(0, 0) \quad (\text{添字は } x \text{ が } i \text{ 回, } y \text{ が } j \text{ 回})$$

(2) 接平面は 1 次近似. $z = e^2 + 6ex + e^2y$

3 極値 $f(x, y) = 3x^3 + 4xy^2 + 9x^2 - 4y^2$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \text{ を解く. } \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 18x = 0 & \cdots \text{ (i)} \\ 8xy - 8y = 0 & \cdots \text{ (ii)} \end{cases} \quad \text{(ii) から } (x-1)y = 0.$$

$x = 1$ or $y = 0$ を得る. (i) に代入して、停留点が 2 つ得られる $(0, 0), (-2, 0)$.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x + 18 & 8y \\ 8y & -8 \end{bmatrix}, \quad D(x, y) = \det H(x, y) = -16(8y^2 + 9x + 9)$$

とおく. (a) $(0, 0)$ のとき. $D(0, 0) = -16 \cdot 9 < 0$ となるので極値をとらない. (b) $(-2, 0)$ のとき. $D(-2, 0) = -16 \cdot -9 > 0$ であり, $f_{xx}(-2, 0) = -18 < 0$ なので極大値をとる.

答: $(-2, 0)$ で極大値 12 をとる.

4 陰関数 $g(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 20 = 0$ 陰関数 $y = \varphi(x)$ について

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{10x + 2y}{2x + 10y}$$

[別解] $y = y(x)$ に注意して式を x で微分. (y の微分は y' . $\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy}$ 利用)

$$10x + 2y + 2xy' + 10y \cdot y' = 0$$

(1) $(0, -2)$ において $\frac{d\varphi}{dx}(0) = -\frac{-2}{-10} = -\frac{1}{5}$. 接線の式は $y = -\frac{1}{5}x - 2$.

(2) 条件付き極値: $g(x, y) = 0$ の条件下での $f(x, y)$ の極値.

ラグランジュ未定乗数法 ($F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおく)

$$F(x, y, \lambda) = y - x - \lambda(5x^2 + 2xy + 5y^2 - 20) \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \text{ を解く. } \begin{cases} -1 - \lambda(10x + 2y) = 0 & \cdots \text{ (i)} \\ 1 - \lambda(2x + 10y) = 0 & \cdots \text{ (ii)} \\ 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 20 = 0 & \cdots \text{ (iii)} \end{cases}$$

(i) と (ii) から $\lambda \neq 0$. また、両式を足すことで $12\lambda(x + y) = 0$. よって $y = -x$.

(iii) に代入して $8x^2 = 20 = 0$. 解いて $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

極値をとる点の候補として $(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, \mp\frac{\sqrt{10}}{2})$

$f(x, y) = y - x$ の極大極小 を調べるため、2 階の微分を調べる

$$y' = -\frac{10x + 2y}{2x + 10y}, \quad y'' = -\frac{(10 + 2y')(2x + 10y) - (10x + 2y)(2 + 10y')}{(2x + 10y)^2},$$

調べたい点では $y = -x$ なので

$$y' = 1, \quad y'' = \frac{3}{x}, \quad f' = y' - 1, \quad f'' = y''$$

(x, y)	y'	y''	f'	f''	判定	値
$(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$	1	$6/\sqrt{10}$	0	$6/\sqrt{10}$	極小	$-\sqrt{10}$
$(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2})$	1	$-6/\sqrt{10}$	0	$-6/\sqrt{10}$	極大	$\sqrt{10}$

答: $(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2})$ で極大値 $\sqrt{10}$ をとる.

以上