Web サイト用 (2023)

微分積分学第二　中間試験（一部）　（山田）

指示：出題によっては "説明" も 部分点として採点します． ただし解答用紙は追加しません．（計算ではなく）要点を解答すること．

$\boxed{1}$ 次の（実数の）２変数関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．
注：解答は「(a, b) において極（大 or 小）値 c をとる」を並べること．

定番の基本問題のため 省略（例年 ３次多項式）

$\boxed{2}$ 次の２変数関数 $f(x, y)$ について，以下の命題 [1], [2] の真偽を判定し，理由を説明せよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[1] $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続である．

[2] $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での x による偏微分係数 $f_x(0, 0)$ は定まる．

$\boxed{3}$ 関数　$f(x,y) = \dfrac{\log(1 + 3x - 4y)}{1 - y}$　について

(1) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での高階の偏微分係数

$$c_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad c_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad \text{および}$$
$$c_{20} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \quad c_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \quad c_{02} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)$$

を求めよ．

(2) xyz-空間内で，$z = f(x, y)$ が定める曲面の $(0, 0, 0)$ での接平面 の式を求めよ．

(3) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ でのテーラー展開を２次の項まで求めよ．
（剰余項の記述は省略してよい．　例：１変数 e^x の場合でいえば「$1 + x + \frac{1}{2}x^2$」 ）

裏面に続く

指示：$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の解答は なるべく**解答用紙 No.2** に解答すること

$\boxed{4}$ 次のそれぞれの 関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(1) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^4}$ $\quad (x,y>0)$

(2) $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ $\quad (0<|y|<x)$

注：整理した式で解答すること．

$\boxed{5}$ ２変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=x^3-2x^2y+y^2-1$$

とし，xy 平面内で $f(x,y)=0$ が定める曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 $(2,1)$ における接線の式を求めよ．

(2) 点 $(2,1)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数 $y=\varphi(x)$ について，
$x=2$ での２階微分係数 $\varphi''(2)$ を求めよ．

以上

微分積分学第二　中間試験（一部）　解説（山田）

$\boxed{2}$ 関数の連続性，偏微分可能性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

[1] $f(x,y)$ の $(0,0)$ での連続性．　$(x,y)\to(0,0)$ の近づけ方を考える．

多項式の次数に注目する．分母が x が 4 次 y が 2 次と不揃いなので $y=x^2$ としてみると，分母は 4 次で 分子も x^4 となって同じ次数になる．

［解答例］放物線 $y=x^2$ に沿って $(x,y)\to(0,0)$ を近づける．つまり (t,t^2) とおいて $t\to0$ と近づける．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=x^2}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{t^2\cdot t^2}{t^4+(t^2)^2}=\lim_{t\to0}\frac{t^4}{2t^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

近づけかたによって異なる値に収束することが示された．

$\underline{f(x,y) \text{ は } (0,0) \text{ で連続ではない}}$．

[2] $f(x,y)$ の $(0,0)$ での x による偏微分係数 $f_x(0,0)$.

偏微分係数 $f_x(0,0)$ とは「2 変数関数 $f(x,y)$ について $y=0$ を固定して x だけの関数 $f(x,0)$（これを $g(x)$ とする）を考えて，その $x=0$ での微分 $g'(0)$ のこと．

［解答例］与えられた関数 $f(x,y)$ で $y=0$ とすると $f(x,0)=0$（値が0の定数関数）．これを x で微分して $f_x(0,0)=0$. $\underline{f(x,y) \text{ は } (0,0) \text{ において } x \text{ による偏微分が可能で } f_x(0,0)=0}$．

$\boxed{3}$ テーラー展開　$f(x,y)=\dfrac{\log(1+3x-4y)}{1-y}=\log(1+3x-4y)\cdot\dfrac{1}{1-y}$ について

まずは $f(0,0)=0$.
分子の x による微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\log(1+3x-4y) &= \frac{3}{1+3x-4y}=3(1+3x-4y)^{-1}\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+3x-4y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(3(1+3x-4y)^{-1}\big)=-1\cdot3^2(1+3x-4y)^{-2}\end{aligned}$$

$f_x(0,0)=3, f_{xx}(0,0)=-9$ が得られる．
次に，分子の y による微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\log(1+3x-4y) &= \frac{-4}{1+3x-4y}=-4(1+3x-4y)^{-1}\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(1+3x-4y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(-4(1+3x-4y)^{-1}\big)=-1\cdot(-4)^2(1+3x-4y)^{-2}\end{aligned}$$

を準備．

$g = g(x,y) = \log(1+3x-4y),\ h = h(y) = \dfrac{1}{1-y}$ とすると $f = gh$ であり,
積の微分公式から $f_y = (gh)_y = g_y \cdot h + g \cdot h_y,\quad f_{yy} = (gh)_{yy} = g_{yy} \cdot h + 2g_y \cdot h_y + 2g_{yy}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= -4(1+3x-4y)^{-1} \cdot \frac{1}{1-y} + \log(1+3x-4y) \cdot \frac{1}{(1-y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -16(1+3x-4y)^{-2} \cdot \frac{1}{1-y} + 2 \cdot -4(1+3x-4y)^{-1} \cdot \frac{1}{(1-y)^2} \\
&\qquad + \log(1+3x-4y) \cdot \frac{1}{(1-y)^3}
\end{aligned}$$

$f_y(0,0) = -4, f_{yy}(0,0) = -24$ が得られる.
最後に

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left\{-4(1+3x-4y)^{-1} \cdot \frac{1}{1-y} + \log(1+3x-4y) \cdot \frac{1}{(1-y)^2}\right\} \\
&= -1 \cdot 3 \cdot (-4)(1+3x-4y)^{-1} \cdot \frac{1}{1-y} + \frac{3}{1+3x-4y} \cdot \frac{1}{(1-y)^2}
\end{aligned}$$

$f_{yx}(0,0) = 15\ (= f_{xy}(0,0))$ が得られる.

(1) $(0,0)$ での値を求めると

$$f(0,0) = 0, \quad \begin{matrix} f_x(0,0) = 3 \\ f_y(0,0) = -4 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} f_{xx}(0,0) = -9 \\ f_{xy}(0,0) = 15 \\ f_{yy}(0,0) = -24 \end{matrix}$$

(3) 2次の項までのマクローリン展開 の解答は

$$\boxed{3x - 4y \ - \ \frac{9}{2}x^2 + 15\,xy - 12\,y^2 + \cdots}$$

$f(x,y)$ の $(0,0)$ でのテーラー展開を　　　　ポリシーは $a_{ij} = x^i y^j$ の係数.

$$a_{00} \ + a_{10}x + a_{01}y \ + \ a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ \cdots$$

とすると、係数の公式は　　　　特に、2次の係数の $\dfrac{1}{2}$ などに注意

$$a_{ij} = \frac{1}{i!j!} f_{x\cdots xy\cdots y}(0,0) \qquad (\text{添字は } x \text{ が } i \text{ 回}, y \text{ が } j \text{ 回})$$

(2) 接平面は1次近似.　$\boxed{z = 3x - 4y}$

解説：既知の展開の利用
$\log(1+X) = X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 - \cdots$ から得られる

$$\log(1+3x-4y) = (3x-4y) - \frac{1}{2}(3x-4y)^2 + \cdots$$

と　$\dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$　の積を次数の低い項から（注意深く）計算しても得られる.
1次の項は　$(3x-4y) \cdot 1$　で，2次の項は　$(3x-4y)y - \dfrac{1}{2}(3x-4y)^2$　である.

$\boxed{4}$ 偏微分の計算問題　（領域：$x, y > 0$）

(1) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^4}$ （領域：$x, y > 0$）について

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}}, \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}}$$

(2) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ （領域：$0 < |y| < x$）について

まず次の 3 つを計算しておく

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right) &= \frac{2y\cdot(x^2-y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} &= -2y\cdot\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right) &= \frac{2x\cdot(x^2-y^2)-2xy\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2} &= 2x\cdot\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right) = \boxed{-\frac{2y}{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right) = \boxed{\frac{2x}{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

解説：極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いると

$$\frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta.$$

領域 $0 < |y| < x$ では $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のため

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2} = \mathrm{Tan}^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

となる．これを微分した方が早い．

$\boxed{5}$ 陰関数　$f(x,y) = x^3 - 2x^2y + y^2 - 1 = 0$　の陰関数 $y = \varphi(x)$ について

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 - 4xy}{-2x^2 + 2y} = \frac{3x^2 - 4xy}{2(x^2 - y)}$$

［別解］$y = y(x)$ に注意して 関係式 を x で微分.（y の微分は y'. $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{d}{dy}$ 利用）

$$3x^2 - 4xy - 2x^2y' + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2 - 4xy}{2(x^2 - y)}$$

(1) $(2,1)$ において $\dfrac{d\varphi}{dx}(2) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.　接線の式 は $\boxed{y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}}$

(2) 陰関数の微分の公式を用いる

$$\frac{d^2\varphi}{d^2x} = -\frac{f_{xx}(f_y)^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(f_x)^2}{(f_y)^3}$$

$$\begin{array}{llcll}
f_x = 3x^2 - 4xy & f_{xx} = 6x - 4y & & f_x(2,1) = 4 & f_{xx}(2,1) = 8 \\
f_y = -2x^2 + 2y & f_{xy} = -4x & \text{から} & f_y(2,1) = -6 & f_{xy}(2,1) = -8 \\
 & f_{yy} = 2 & & & f_{yy}(2,1) = 2
\end{array}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d^2x} = -\frac{8 \cdot (-6)^2 - 2 \cdot (-8) \cdot 4 \cdot (-6) + 2 \cdot 4^2}{(-6)^3} = \boxed{-\frac{8}{27}}$$

［別解］$y = y(x)$ に注意して 関係式 をもう 1 回 x で微分.（y' はそのままでよい）

$$6x - 4y - 4xy' - 4xy' - 2x^2y'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

$(x,y) = (2,1)$ および $y' = \dfrac{2}{3}$ を代入する.

$$12 - 4 - 8 \cdot \frac{2}{3} - 8 \cdot \frac{2}{3} - 8y'' + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'' = \varphi''(2) = -\frac{8}{27}}$$

以上