

線形代数学第一 期末試験 (一部) (山田)

- [2] [逆行列とベクトル] 次の行列 A と 関係式 (★) について, 下の問いに答えよ.
(結論のみでよい)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad (\star) \quad \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- (1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
(2) 関係式 (★) が成り立つとき x, y, z, w のそれぞれを s, t, u, v の式で表せ.

- [3] [対称行列・交代行列, 階数]

次の行列 M を, 対称行列 T (${}^tT = T$) と交代行列 S (${}^tS = -S$) の和 $M = T + S$ として表せ. (解答欄には要点を書くこと)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- [5] [行列式の性質] 行列 A は 8次正方行列 で, その行列式は 5 ($|A| = 5$) で,

A の第 1 行, 第 2 行が

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

であるとする. このとき, 以下のそれぞれの値を求めよ.

- (1) $2A$ の行列式 ($|2A|$)
(2) A^3 の行列式 ($|A^3|$)
(3) A の転置行列 tA の行列式 ($|{}^tA|$)
(4) A を列分割し, 両端以外の列を逆順 (つまり, 左から第 1, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 8 列の順) に並べ換えた行列 A' の行列式 ($|A'|$)
(5) A の第 1 行だけを次のベクトルに取りかえた行列 A'' の行列式 ($|A''|$)

$$15 \quad 13 \quad 11 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

- [6] [行列式の性質] 以下のように n 次正方行列 A_n ($n \geq 3$), $\mathbb{R}^8$ のベクトル e_1 と未知のベクトル x を定める. (A_n は対角成分が 2, そのとなりが 1 で他は 0)

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_8 \end{bmatrix}$$

であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) A_n の行列式 $|A_n|$ を求めよ.
(2) 連立方程式 $A_8 x = e_1$ の解 x の第 4 成分 x_4 を求めよ.

- [4] [連立方程式の解の様子] $n \geq 2$ とし, A は n 次正方行列とする.

未知ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に関する方程式について, 次のことを証明せよ.

「ある $b \in \mathbb{R}^n$ に対して $Ax = b$ の解が存在しない
ならば, $Ax = 0$ には $x = 0$ 以外の解が存在する」

数年分の過去問からの抜粋です. (目安: B 4 で 1 枚両面)

線形代数学第一 期末試験（一部） 解説（山田）

解く過程・解法に重点をおいて採点します。解法の要点を記述すること。
(指示があるときは除く)

2 (1) 逆行列の計算 は 必須.

A^{-1} は 1 カ所だけ分数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ に対して } (\text{答}) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 出題の真意に気がついたか!? 「理解度の差」が出ただろう. 関係式 (a) は

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

と変形できる. ここから, x, y, z, w をそれぞれ s, t, u, v で表せ, という出題だから, 両辺に A^{-1} をかければよい. A^{-1} は既に (1) で求めている.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} \\ &= s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1/4 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-v \\ t-3u+2v \\ -t+2u-v \\ t/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

* 試験の本番中, 解いた後でからくりに気がついた学生もいただろう.

3

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M + {}^tM) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ S &= \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 5 (1) $|2A| = 2|A|$ ではない. A が n 次正方行列のとき $|2A| = 2^n|A|$ である.
(2) $|AB| = |A||B|$ であり, 特に $|A^n| = |A|^n$. (3) $|{}^tA| = |A|$.

(4) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ の順列 $(1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 8)$ の符号は $-$ (転倒数は 15, 互換に分割すると例えば $(2\ 7)(3\ 6)(4\ 5)$) $\text{sgn}(1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 8) = -1$.
よって $|A'| = -|A|$.

(5) 与えられた A の第 1 行, 第 2 行は

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

で (どちらも等差数列!), 第 1 行だけを

$$15 \quad 13 \quad 11 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

に変えるには (i) 第 1 行を -2 倍して, (ii) 第 1 行に第 2 行の 17 倍を足すという操作をすればよい. 行列式の変化は, (i) で -2 倍, (ii) では変化しない.

(答) (1) $1280 (= 2^8 \cdot 5)$, (2) $125 (= 5^3)$, (3) 5 , (4) -5 , (5) -10

6 講義で扱った内容 (出席確認のような出題)

(1) 余因子展開を用いることで, $|A_n|$ の漸化式 $|A_{n+1}| = 2|A_n| - |A_{n-1}|$ つまり

$$|A_{n+1}| - |A_n| = |A_n| - |A_{n-1}|$$

が得られ, $|A_n|$ が等差数列とわかり, $|A_3| = 4, |A_4| = 5$ などから

(答) $|A_n| = n + 1$

(2) クラメル公式から $x_4 = \frac{|(A_8)_4(\mathbf{e}_1)|}{|A_8|} = \frac{5}{-9}$

説明: $(A_8)_4(\mathbf{e}_1)$ は A_8 の 4 列目を $\mathbf{e}_1$ に置き換えた行列. その列 (第 4 列) で余因子展開すると $\lceil (-1) \times |(A_8)_{1,4}| \rceil$ ($(A_8)_{1,4}$ は A_8 の $(1, 4)$ 小行列) の項だけになる. $(A_8)_{1,4}$ は 7×7 行列で

$$\text{左上の } 3 \times 3 \text{ が } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F \text{ とする}$$

左下の 4×3 行列がゼロ行列 O 右下の 4×4 が A_4

と分割できるので, $|(A_8)_{1,4}| = |F| \cdot |A_4| = 5$.

4 仮定 (解の非存在) から $\text{rank } A < \text{rank } (A\mathbf{b}) \leq n$ が得られる.
このとき $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ について, 解の自由度 $= n - \text{rank } A > 0$ となる.

以上