

連立方程式の計算問題の採点方式と講評 (山田)

出題によっては“説明”も部分点として採点します。ただし
解答用紙は追加しません。(計算ではなく)要点を解答すること。

③ [連立方程式] 未知数 x, y, z, w に関する, 次の連立1次方程式を解け。

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z - 6w = 7 \\ 2x + 3y + z - 5w = 9 \\ 3x - 5y - 3z + 8w = 19 \\ x - 3y - z + 4w = 5 \end{cases}$$

解答例 拡大係数行列を行変形を施して簡約化する。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{並べ替え}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2) - 2(1) \\ (3) - 3(1) \\ (4) - 3(1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -13 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -18 & -8 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} (3) \times \frac{1}{4} \\ (2) \leftrightarrow (3) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & -13 & -1 \\ 0 & 11 & 5 & -18 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (3) - 9(2) \\ (4) - 11(2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

下の2行を取り出して

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -10 \\ 5 & -7 & -19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 & -10 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

もとに戻して

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (1) - 4(4) \\ (2) + (4) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1) + (3)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) + (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{式に戻して 答: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \\ z = 6 \\ w = 7 \end{cases}$$

ここで述べたいこと: 記述式試験の答案では, どのように考え, どのような方法・公式を利用して解いたか 説明することが大切. 計算問題であっても, ある意味, 結論よりも説明が重要.

特に, 間違えた場合に どこで間違えたか 後から発見できるように書いておくと良い. 臨時に 工夫したこと があればそれも書いておくと良い. 自分のためである. このことは自分でだんから心がけると良い.

採点者としては: 結論が間違っているても説明(や過程)が正しければ部分点を配点することができる. もちろん過程のすべてを書く必要はない. 要点を簡潔にまとめると良い.

採点例

答案例 はいずれも 仮想 です (実際にあった答案に基づいています).
配点を **20点満点** と仮定します.

【答案例 1】 拡大係数行列に行変形を施す.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 \end{bmatrix} \quad \text{答: } \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \\ z = 44 \\ w = 31 \end{cases}$$

(過程が完全に省略されている)

採点 0点 結論が (値として大きく) 間違っている上に 過程が完全に省略されていると部分点をつけられない. ただの 計算ミス かも知れないが, 根本的な誤解があるのかも知れない.

【答案例 2】

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2) - 2(1) \\ (3) - 3(1) \\ (4) - 3(1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -13 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -18 & -8 \end{bmatrix}$$

[中略 (過程が書かれている)]

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (1) - 4(4) \\ (2) + (4) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(1) + (3)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) + (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{答: } \begin{cases} x = 54 \\ y = 8 \\ z = 6 \\ w = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

採点 15点 過程の記述から 計算ミスに過ぎないと判定できる. (赤字の箇所を 符号ミス)

【答案例 3】 拡大係数行列に行変形を施す.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{答: } \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 6 \\ w = 7 \end{cases}$$

(過程が完全に省略されている)

採点 5点 正解ではない. 4つの未知数のうち2つは正解なので 計算ミス と推測されるものの, 過程が完全に省略されていると部分点をつけにくい.

同様の答案で, もし4つの未知数のうち3つ正解なら 採点 10点 になるかも知れない.

【答案例 4】

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2) - 2(1) \\ (3) - 3(1) \\ (4) - 3(1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -13 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -18 & -8 \end{bmatrix}$$

[中略 (過程が書かれている)]

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) + (3)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) + (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{答: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \\ z = 6 \\ w = 7 \end{cases}$$

採点 15点 説明に 数学として誤った記述がある。(赤字の箇所: 行変形は = ではない)
結論は正解であるが, 記述式試験の答案として 満点 ではない。

注: 後半の 行列式 では, 行変形しながら = で変形するので注意が必要。

【答案例 5】

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{答: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \\ z = 6 \\ w = 7 \end{cases}$$

(過程が完全に省略されている)

採点 15点 結論は正解であるが, 説明を省略しすぎており, 記述式試験の答案として 満点 ではない。5点刻みが前提なら 15点。どのように考え, どんな方法・公式を利用して解いたか 説明することが大切。

おわりに: 線形代数学で学ぶ 連立 1 次方程式 の内容は, 「連立方程式の解法 (未知数や方程式の個数がどれほど多い場合でも)」「連立方程式の解の様子 (すべての連立方程式に共通する 解の集合の大きさ尺度や性質)」などから広い意味で数学全般につながる理論体系の基礎である。単に 連立方程式を解くだけ, 逆行列を求めるだけ, なら 修得後は計算機を利用すれば良い。

作業「行変形による行列の簡約化」が「行列の階数(rank)」や 逆行列を求める作業 (さらに 行列式を効率よく求めるためにも用いる) と共通する 理由 を理解できただろうか。

以上

作成: 山田裕一