

線形代数学第一 中間試験（一部）（山田）

出題によっては“説明”も部分点として採点します。ただし
解答用紙は追加しません。（計算ではなく）要点を解答すること。

1 [連立方程式]

- (1) 次の行列 M の階数 $\text{rank } M$ を述べよ。 a の値によって階数が変化することに気をつけること。

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 7 & 9 & a^2 - 15 \end{bmatrix}$$

- (2) a を定数とする。未知数 x, y, z に関する次の連立方程式の解を記述せよ。 a の値によって“解の様子”が変わること（解の非存在や、自由度の変化）に注意せよ。

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 4 \\ 3x + 4y - 5z = 3 \\ 7x + 9y + (a^2 - 15)z = a + 9 \end{cases}$$

- 2 [行列の成分計算, 非可換性] 行列 F を次の通りとする。 3×3 行列 X についての方程式 $FX = XF$ を解け。 X の (i, j) 成分は x_{ij} とすること。

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 4 [逆行列] 行列 C の逆行列 C^{-1} が次の行列であったとする。下の問に答えよ。（解答欄には要点を書くこと）

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 18 & 4 \\ 14 & 18 & 14 & 8 \\ 8 & 12 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

- (1) $2C$ の逆行列 $(2C)^{-1}$ を求めよ。
(2) C の第4列を2倍した行列 C' の逆行列 $(C')^{-1}$ を求めよ。

実物はここで終わりではありません。（目安：B4で1枚両面）

解く過程・解法に重点をおいて採点します。解法の要点を記述すること。（指示があるときは除く）大学で学ぶ「数学」では、大切なのは「答え」ではなく理由「なぜそうなるのか」にある。多くの学生の答案から、そのような学ぶ覚悟・説明する意欲は感じられた。しかし、少数だがあまりにも“未熟な”答案があった。

答え合わせして喜ぶタイプのお子様向けの数学は卒業するのだ

- 1 (2) a を含む成分が増えないように基本行変形して $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a + 2 \end{bmatrix}$ 。

この3行めを、このまま $a^2 - 4$ で割ってはいけな。 $a^2 - 4 = 0$ の可能性があるからだ。

- (i) $a = -2$ のとき $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 1)$ (t は任意)。
(答) (ii) $a = 2$ のとき 解なし
(iii) $a^2 \neq 4$ のとき $(x, y, z) = (\frac{a-3}{a-2}, \frac{2}{a-2}, \frac{1}{a-2})$

観察：(i) の場合の解で形式的に $t = \frac{1}{a-2}$ とおくと (iii) の解となっている。

- 2 $F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと $F = E + F_0$ (E は単位行列)。

単位行列は任意の行列と交換可能だから、結局 $F_0 X = X F_0$ を解けば良い。
未知数が9個 (x_{ij} 達) の連立方程式。解答は

$$(答) X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (a, b, c \text{ は任意})$$

つまり $X = aE + bF_0 + c(F_0)^2$ ということである。 F_0 が F_0 自身や $(F_0)^2$ と交換可能なのは言うまでもないだろう。

- 4 (1) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$ ではない。 $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$ である。
(2) [基本行列の操作] A の第2列と第4列を交換した行列は、基本行列 P_{24} 「単位行列の第2列と第4列を交換した行列」を A に 右から かけた行列である： $A = AP_{24}$ 。従って

$$(A')^{-1} = (AP_{24})^{-1} = P_{24}^{-1}A^{-1} = P_{24}A^{-1}$$

行列に P_{24} を左からかけることになるので、(答) 第2行と第4行が交換される。

*講義で「基本行列を左からかけると…」の説明を受ければ、反射的に「じゃ、右からだ?」という疑問は当然感じたと思う。そのような考察は自分で展開すべきだ。教わって暗記したって何の実力にもならない。以上