Web サイト用

旧 線形代数学第一　空間図形（山田）

$\boxed{1}$ [ベクトル積, 空間図形]

(1) ２つのベクトル　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$ について, 以下のそれぞれを求めよ.

(a) 内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$　　(b) 外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(c) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす平行四辺形の面積

(d) $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{b}$ かつ $\|\boldsymbol{u}\|=1$ となるベクトル $\boldsymbol{u}$（２つある）

(2) xyz-空間で, 直線 ℓ と平面 π を次の通りとする

$$\ell : \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-8}{6}, \qquad \pi : x-3y+2z=2$$

(e) 直線 ℓ と平面 π の交点

(f) 原点 O から平面 π に下ろした垂線の足

(g) 原点 O から直線 ℓ までの距離

略解・解答例　（山田）

(a) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=26$,　(b) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-4\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$,　(c) $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=2\sqrt{6}$

(d) 方向は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と同じで, 向きは正負の２通り. 長さを１にすればよい.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を, その長さ $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=2\sqrt{6}$ で割ればよい.　（答）$\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

略解・解答例　（山田）

[空間図形の問題]

$$\text{直線 } \ell : \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-8}{6}, \qquad \text{平面 } \pi : x-3y+2z=2$$

(e) 直線 ℓ と平面 π の交点：
ℓ 上の点は,

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-8}{6}=t \quad \text{とおく}$$

ことにより, $(3t+1, 2t-1, 6t+8)$ とかける. これが π に含まれる条件は

$$(3t+1)-3(2t-1)+2(6t+8)=2$$

解くと $t=-2$. 交点の座標は $\underline{(-5,-5,-4)}$.

(f) 原点 O から平面 π におろした垂線の足：
その点を H とおく $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 π の法ベクトルと平行だから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$$

この点 H は平面 π 内にあるから

$$t-3(-3t)+2(2t)=2$$

解くと $t=\frac{1}{7}$. よって H の座標は $\underline{\left(\frac{1}{7},-\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right)}$.

(g) 原点 O から直線までの距離：
O から ℓ に下ろした垂線の足 K は, ℓ 上にあるから, 前問 (e) の第一段階と同様 K$(3t+1, 2t-1, 6t+8)$ とかける. 線分 OK が ℓ と垂直である条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\6\end{bmatrix}=0, \quad \text{計算して} \quad 3(3t+1)+2(2t-1)+6(6t+8)=0.$$

解くと $t=-1$. K の座標は $(-2,-3,2)$. 求める距離は線分 OK の長さなので $\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+2^2}=\underline{\sqrt{17}}$