過去の期末試験から

$\boxed{2}$ 行列 B と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次の通りとする.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 5z = 0 \right\}.$$

線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) g の像 $(\mathrm{Im}\ g)$ と V との共通部分 $(\mathrm{Im}\ g) \cap V$ の基底を 1 組求めよ.

(2) V の基底 $\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right)$ で $\boldsymbol{a}_2 = g(\boldsymbol{a}_1)$ を満たすものを 1 組求めよ.

(3) 前問の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に対して $\{\, g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2) \,\}$ が $\mathrm{Im}\ g$ の基底となるかどうか判定せよ.

解答例

(1) まず g の像 $(\mathrm{Im}\ g)$ の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. （これは基本）

この基底を $\mathcal{G}$ とする. $\mathrm{Im}\ g$ の任意のベクトルは, 基底の 1 次結合

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ -b \end{bmatrix}$$

と表せる. これが V に（従って $(\mathrm{Im}\ g) \cap V$ に）属す条件は,

$$\begin{aligned} a + (a+b) - 5(-b) &= 0 \\ a &= -3b \end{aligned} \qquad \text{このとき} \qquad \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3b \\ -2b \\ -b \end{bmatrix} = -b \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって, $(\mathrm{Im}\ g) \cap V$ の基底として $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$ 　0 以外の定数倍も正解

(2) 考えてみてほしい. V の基底 $\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right)$ が $\boldsymbol{a}_2 = g(\boldsymbol{a}_1)$ を満たすとすると $\boldsymbol{a}_2$ は $\mathrm{Im}\ g$ にも V にも属す. つまり $\boldsymbol{a}_2 \in (\mathrm{Im}\ g) \cap V$. 前問題の結果を利用できる.

$\boldsymbol{a}_2 \in (\mathrm{Im}\ g) \cap V$ とわかれば，前問題の結果を利用できる．

$$\boldsymbol{a}_2 \in (\mathrm{Im}\ g) \cap V \ = \ \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

題意の 1 例としては $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ として，$g(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_2$ （$\Leftrightarrow B\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$）となる

$\boldsymbol{a}_1$ を見つければ良い．$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V$（$\Leftrightarrow x + y - 5z = 0$）とおいて

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求める基底の 1 例として $\underline{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$ 両方を，0 以外の同じ定数倍したものも正解.

(3) $(g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2)) = (\boldsymbol{a}_2, B\boldsymbol{a}_2) = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$.

この 2 つのベクトルは（当たり前だが）どちらも 2 次元空間 $\mathrm{Im}\ g$ に属し，
明らかに平行ではなく 1 次独立なので 基底となる.

（定理：n 次元空間の，n 本の（つまり次元と同数の）ベクトルの組は，
1 次独立ならば自動的に生成系をなし，基底となる.）

(4) 出題はされていないが，

・$\mathrm{Im}\ g$ について，基底 $\mathcal{G}$ から基底 $\big(g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2)\big)$ への基底変換行列 P は

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ = \ 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \ = \ 12 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ による.

以上