

指導的な練習問題 (by 山田)

問 以下の問いに答えよ。(それらの関連性は)

- (1) $\mathbb{R}^3$ 内で, 下の3つのベクトルについて, 1次独立かどうか判定せよ.
1次従属の場合には, それらの非自明な1次関係式を記せ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (2) 3次元の線形空間 V で $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が1次独立とする.
下の V 内の3つのベクトルについて, 1次独立かどうか判定せよ.
1次従属の場合には, それらの非自明な1次関係式を記せ.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_2 = 4\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 5\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 5\mathbf{a}_3.$$

- (3) $\mathbb{R}[x]_2$ で 高々2次以下の実数係数多項式のなす線形空間とする.
下の $\mathbb{R}[x]_2$ 内の3つのベクトルについて, 1次独立かどうか判定せよ.
1次従属の場合には, それらの非自明な1次関係式を記せ.

$$p_1 = x^2 + 3x - 4, \quad p_2 = 4x^2 - 2x + 5, \quad p_3 = x^2 - 3x + 5.$$

解答

- (1) 1次従属. 非自明な関係式として

$$5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (2) 1次従属. 非自明な関係式として

$$5\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 7\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

- (3) 1次従属. 非自明な関係式として

$$5p_1 - 3p_2 + 7p_3 = 0$$

計算部分の結果

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

計算の行変形

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -14 & -6 \\ 0 & 21 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[一言解説] (2) が最強. 抽象度が高い.

「一言解説」(2) が最強、抽象度が高い。

(2) を認めると、(1) も (3) も (2) の具体例に過ぎない。

(1) は $V = \mathbb{R}^3$ に標準基底で、(3) は $V = \mathbb{R}[x]_2$ に基底 $(x^2, x, 1)$ で、

(2) を適用すればよい。

(1) を抽象化して数学的な表現にしたものが (2) だと言える。

(2) の最も簡単な例が (1) である。(3) の計算部分は (1) のそれと共通である。

「1次結合の記法 (p.115)」による考察： (2) で与えられた3式は

$$(v_1, v_2, v_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

であり、1次独立かどうか判定するための方程式は

$$(v_1, v_2, v_3) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

である。この2つを合わせて

$$(a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

条件「 a_1, a_2, a_3 が1次独立」により、下線部のベクトルの成分がすべて0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これで (1) の計算部分に帰着した。

(3) は、出発点が次のものになり、ほぼ同じ議論

$$(p_1, p_2, p_3) = (x^2, x, 1) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

注： $\mathbb{R}[x]_2$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ は「式としての」 $0 (= 0x^2 + 0x + 0)$ 。

(値としての0ではない。成分が複数の“ベクトル”でもない。)