

線形代数学第二 期末試験（一部）（山田）

出題によっては“説明”も部分点として採点します。ただし
解答用紙は追加しません。（計算ではなく）要点を解答すること。

- 1 ユークリッド内積をもつ $\mathbb{R}^4$ において、ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}$ を次の通りとする。
また、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の生成する部分空間を W_2 , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の生成する部分空間を W_3 とする。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle, \quad W_3 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$$

- (1) W_2 の正規直交基底を構成せよ。 (2) W_3 の正規直交基底を構成せよ。
(3) それらを利用して

$\mathbf{b}$ の W_2 への正射影 $\mathbf{w}_2$, および $\mathbf{b}$ の W_3 への正射影 $\mathbf{w}_3$

を求めよ。

3 【頻出】 $\mathbb{R}^3$ 内で、次の2次元の線形部分空間 W とその2種類の基底 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を次の通りとする.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \right\}. \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

また, W のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする. これらについて, 次のベクトルや行列などをそれぞれ求めよ.

- (1) $\boldsymbol{v}$ の, 基底 $\mathcal{F}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}$, および基底 $\mathcal{G}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}}$.
- (2) 基底 $\mathcal{F}$ から基底 $\mathcal{G}$ への基底の取り替え行列 P ,
 およびその逆 ($\mathcal{G}$ から $\mathcal{F}$ へ) の基底の取り替え行列 Q .
- (3) $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}}$ を P と $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}$ から求める 計算法 を記せ.

さらに, W から W 自身への線形写像 f を下の様に定める.

$$f: W \rightarrow W, \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x & -z \\ -y+6z \\ x-y+5z \end{bmatrix}$$

これについて, 以下のものを求めよ.

$\boldsymbol{v}$ を f で n 回写したものを $f^n(\boldsymbol{v}) = f(f(\cdots f(\boldsymbol{v})\cdots))$ と表す.

- (4) $f(\boldsymbol{v})$ と $f(f(\boldsymbol{v}))$ を求めよ.
- (5) 定義域, 値域の W で共に基底 $\mathcal{F}$ を用いる場合の f の表現行列 A .
- (6) 定義域, 値域の W で共に基底 $\mathcal{G}$ を用いる場合の f の表現行列 A' .
- (7) A' を A と P から求める 計算法 を記せ.
- (8) $f^n(\boldsymbol{v})$ の 基底 $\mathcal{G}$ に関する座標 $[f^n(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}}$ について,
 まず A' と $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}}$ を用いた 計算法 を表し, 次にそれを 実際に 計算せよ.
 そして最後に, その結果を利用して $f^n(\boldsymbol{v})$ を求めよ.

注: 行列 A の n 乗を求めるのは大変だが, 行列 A' の n 乗は簡単である.

数年分の過去問からの抜粋です. (目安: B 4 で 1 枚両面)

線形代数学第二 期末試験（一部） 解説（山田）

解く過程・解法に重点をおいて採点します。解法の要点を記述すること。

（指示があるときは除く）

① [グラム・シュミットの正規直交化・正射影] $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ を次の通りとする。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1) $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, (2) $\mathcal{U}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

(3) 正射影の公式を用いる $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{b}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = 6\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$

$$\mathbf{w}_3 = (\mathbf{b}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 = 6\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

メモ： $\mathbf{w}_3$ だけを求めるなら、 $\mathbf{w}_3^\perp = (\mathbf{b}, \mathbf{u}_4)\mathbf{u}_4$ から $\mathbf{w}_3 = \mathbf{b} - \mathbf{w}_3^\perp$ とする方が楽。

③ (1)(2) 略. (3) 一般に、基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底の取り替え行列を P とするとき、ベクトル $\mathbf{v}$ の、基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$ と基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ との関係は

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$$

（ P ではなくて P^{-1} ）であることに注意。

[後半] (4) 計算のみ. $f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$, $f(f(\mathbf{v})) = \begin{bmatrix} -17 \\ 79 \\ 62 \end{bmatrix}$, $f(f(f(\mathbf{v}))) = \begin{bmatrix} -79 \\ 293 \\ 214 \end{bmatrix}.$

(5) と (6) まず最初に、求める行列の型が 2×2 行列である（ W が 2 次元だから）ことに気がついておこう。説明のため、基底 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ のベクトルに名前をつけておく。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

W の基底が 2 組 $\mathcal{F} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ 与えられている。

さて、言葉の意味を確認する：

「1 次変換 $f: W \rightarrow W$ の、 W の基底 $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$

に関する表現行列が $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 」

とは ★ $\begin{cases} f(\mathbf{w}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{w}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 \end{cases}$ という意味である. (係数の“並び順”に注意)

1 次結合の記法を用いると $(f(\mathbf{w}_1), f(\mathbf{w}_2)) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)A$ 成分で書くと

$$\star \quad (f(\mathbf{w}_1), f(\mathbf{w}_2)) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

となる (成分や係数の“並び順”に十分に注意すること) .

(6) の計算. $f(\mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, $f(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ となるので, この場合の★式は,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

各々 解いて $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 並べて $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$.

同じことであるが, こう考えてもよい.

A の構成法: $f(\mathbf{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標 $[f(\mathbf{a}_i)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{bmatrix}$ を 順に並べる.

また, 計算部分は☆を利用して 次の連立方程式から解くこともできる.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) も同じ問題. $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. 対角行列になった.

—— $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は, それぞれ F の固有値 2, 3 に対する固有ベクトル!

(7) 基底の取り替え行列と表現行列の関係は $A' = P^{-1}AP$

暗記は失敗しやすい. 設定に応じて 図式を書いて考えれば 間違えない.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & & \xrightarrow{A} & & \mathbb{R}^2 \\ & \nwarrow \mathcal{F} & & \nearrow \mathcal{F} & \\ \boxed{\text{図式}} & P \uparrow \downarrow P^{-1} & W & \xrightarrow{f} & W & P \uparrow \downarrow P^{-1} \\ & \swarrow \mathcal{G} & & \searrow \mathcal{G} & \\ \mathbb{R}^2 & & \xrightarrow{A'} & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

図式の中では (基底の取り換えではなく) 座標の変換を行うことに注意.

(8) ベクトル も 線形写像 f も 基底 $\mathcal{G}$ に関して 表示して考えると,

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}) \text{ の} \\ \mathcal{G} \text{ に関する} \\ \text{座標 } [f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{線形写像 } f \text{ の} \\ \mathcal{G} \text{ に関する} \\ \text{行列表示 } A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ベクトル } \boldsymbol{v} \text{ の} \\ \mathcal{G} \text{ に関する} \\ \text{座標 } [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}} \end{pmatrix}$$

の関係となる. つまり $[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}} = A'[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}}$.

図式で考えると

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & W \\ \mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \text{において} \quad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v} & \xrightarrow{f} & f(\boldsymbol{v}) \\ \mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{A'} & [f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}} = A'[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}} \end{array}$$

写像 f の繰り返し は 行列 A' の累乗 に対応する. 図式で考えると

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{f} & \cdots \\ \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow \mathcal{G} & & \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A'} & \cdots \end{array}$$

$\boldsymbol{v}$ は左上の W にいて, f を繰り返すと 右に 移って行く.

下の段では 座標に A' を かけていくことになる.

よって

$$[f^n(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}} = (A')^n[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}}.$$

出題に戻って, $(A')^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ だから

$[f^n(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n \\ 5 \cdot 3^n \end{bmatrix}$. $\mathcal{G}$ による座標 がわかったので, $f^n(\boldsymbol{v})$ は

$$f^n(\boldsymbol{v}) = 7 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \cdot 3^n \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n \\ -7 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -7 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n \end{bmatrix}.$$

$n = 1, 2, 3$ を代入すると, 確かに (4) の結果に一致している.

以上