

線形代数学第二 中間試験 (一部) (山田)

出題によっては“説明”も部分点として採点します。ただし
解答用紙は追加しません。(計算ではなく)要点を解答すること。

1 線形空間 $\mathbb{R}^5$ の部分空間 W_1, W_2 を次の通りとする。

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ x \\ b \\ y \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} 2x = 2a + b \\ 2y = b + 2c \\ x + y = 2b \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$$

- (1) W_1 について, 次元 ($\dim W_1$) と基底の 1 組を求めよ.
- (2) W_2 について, 次元 ($\dim W_2$) と基底の 1 組を求めよ.
- (3) 共通部分 $W_1 \cap W_2$ について,
次元 ($\dim(W_1 \cap W_2)$) と基底の 1 組を求めよ.
- (4) 和空間 $W_1 + W_2$ の次元 ($\dim(W_1 + W_2)$) を求めよ.

注: 解く過程を重視します。

2 V, W を線形空間とする。

(1) 「写像 $f: V \rightarrow W$ が線形写像である」ことの定義を記せ。

さて, $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 F が次の条件をみたすとする。
以下の問いに答えよ。

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- (2) $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とする. $F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ.
- (3) 一般のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $F(\boldsymbol{x})$ を求め, 行列を用いて
 $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の形で表せ.

3 $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間 V と, V から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 F を次の通りとする:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \right\}. \quad F: V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mapsto F \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

これについて,

(1) F の像 $\text{Im } F$ の次元と基底 を, (2) F の核 $\text{Ker } F$ の次元と基底 を,
それぞれ求めよ.

線形代数学第二 中間試験（一部） 解説（山田）

解く過程・解法に重点をおいて採点します。解法の要点を記述すること。

（指示があるときは除く）

[1] 次元と基底を求める問題は 必須. 2 種類の問題の違いも理解しておくこと.
省スペースのため, 先に 基底の問題の解答（結論）を述べる.

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(1) 連立方程式の解空間：係数行列を行変形して解けばよい.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

係数行列の rank = 3 なので $\dim W_1 = 5 - 3 = 2$. 基底の 1 組として

$$\star \begin{cases} a = 2y - 3c \\ x = 3y - 4c \\ b = 2y - 2c \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} y = s \\ c = t \end{cases} \quad \text{と置いて} \quad \begin{bmatrix} a \\ x \\ b \\ y \\ c \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 生成する空間：列変形 で解く. rank = 3 なので $\dim W_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) W_2 \text{ のベクトル } \mathbf{v} \left(= \begin{bmatrix} a \\ x \\ b \\ y \\ c \end{bmatrix} \right) = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ t \\ s \end{bmatrix} \quad \text{が } W_1 \text{ に属するための条件は}$$

$$\star \text{より} \quad \begin{cases} s = 2t - 3s \\ t = 3t - 4s \\ u = 2t - 2s \end{cases} \quad \text{整理して} \quad \begin{cases} t = 2s \\ u = 2s \end{cases}. \quad \text{このとき } \mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

□2 [線形写像] (1) 用語の定義は重要. (2) 例えば $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ なので,
 F の線形性から

$$F(\mathbf{e}_2) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - \frac{1}{2}F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_3) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - \frac{1}{3}F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_1) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - F(\mathbf{e}_2) - F(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(3) $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ と F の線形性から

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xF(\mathbf{e}_1) + yF(\mathbf{e}_2) + zF(\mathbf{e}_3) \\ &= x \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}} \mathbf{x} \end{aligned}$$

下線の行列が A .

□3 とりあえず V の次元と基底を求めておく．線形空間を扱うときの基本だ．

$$V \text{ は 3 次元. 基底として } \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

特に, V はこの 3 つのベクトルに生成される．

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) 一般に, 線形写像 $F: V \rightarrow W$ の像 $\text{Im } F$ の定義は

$$\text{Im } F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$

である．出題に戻って, V に属すベクトル

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

の F による像は

$$\begin{aligned} & F \left(x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x_1 F \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_2 F \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_3 F \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので, $\text{Im } F$ は, この最後の 1 次結合に現れた 3 つのベクトルに生成される空間である．

$$\text{Im } F = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

この空間の次元と基底を答えれば良い（基本問題の方法）．

$$\text{Im } F \text{ は } \underline{2 \text{ 次元}}. \text{ 基底として } \underline{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}. \text{ (答)}$$

(2) 一般に, 線形写像 $F: V \rightarrow W$ の核 $\text{Ker } F$ の定義は

$$\text{Ker } F = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subset V.$$

である. 今の場合, F は $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V から $\mathbb{R}^3$ への線形写像なので, まず次のようになる.

$$\text{Ker } F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in V \mid F \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

さらに, 具体的な V ($\subset \mathbb{R}^4$) と F の設定を適用すると,

$$\begin{aligned} \text{Ker } F &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2y + z + 2w = 0 \\ 2x + 3y + z + 3w = 0 \\ 2y + z + 2w = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

この空間の次元と基底を答えれば良い (基本問題の方法) .

$$\text{Ker } F \text{ は } \underline{1 \text{ 次元}}. \text{ 基底として } \underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}. \text{ (答)}$$

ここで, 公式も思い出しておこう. 一般に, 線形写像 $F: V \rightarrow W$ に関して

$$\dim V = \dim \text{Im } F + \dim \text{Ker } F$$

今の場合, $3 = 2 + 1$ として成り立っている.

以上