ある表現行列の問題の解説（by 山田）

$\boxed{\text{問}}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．さらに線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

をみたす．このとき, $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であり, $\mathcal{B} = (f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2))$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．次の問いに答えよ．

(1) f の標準基底に関する表現行列を求めよ．
(2) f の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ．

［解答］計算と結論だけ書くと

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} \quad \square$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}} \quad \square$$

［(1) 考え方］$\mathbb{R}^3$ の標準基底は $\mathcal{E}=\left(\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ である.

〈定義の確認〉$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像について, 標準基底に関する表現行列 とは

$$f(\boldsymbol{x})=M\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$$

となる $m\times n$ 行列 M のことである（⇒ 解法２）. $n\times m$ 行列ではない（逆）ことに注意！

今の場合 $n=3,m=2$ なので求める行列は 2×3 行列 M であり,

$$M=\big(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ f(\boldsymbol{e}_3)\big)$$

と成分を並べて求めることができる.（理由：例えば $f(\boldsymbol{e}_1)=M\boldsymbol{e}_1$ は M の第 1 列である）

$f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めたい. 解法として, $\boldsymbol{e}_1$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表す.
$\boldsymbol{e}_1=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\alpha_3\boldsymbol{a}_3$ であれば $f(\boldsymbol{e}_1)$ を

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{e}_1)&=f(\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\alpha_3\boldsymbol{a}_3)\\&=\alpha_1f(\boldsymbol{a}_1)+\alpha_2f(\boldsymbol{a}_2)+\alpha_3f(\boldsymbol{a}_3)\\&=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

と求めることができる. では $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ をどのように求めるか. 未知数を置いて連立方程式にして解けば良い.

$$\begin{aligned}x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3&=\boldsymbol{e}_1\\x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

同様に $f(\boldsymbol{e}_2),f(\boldsymbol{e}_3)$ も求める. 解く連立方程式は 次の３つ

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

だが, いっぺんに 3 つとも解く方法がある. 逆行列である.

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

これにより（1 列目から）$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2$ が得られて

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

同様に（２列目から）$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3$,（３列目から）$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3$ を得て

$$f(\boldsymbol{e}_2) \ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) \ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \ = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

求める行列 M は, それら $f(\boldsymbol{e}_1)$ $f(\boldsymbol{e}_2)$ $f(\boldsymbol{e}_3)$ を並べればよい.

$$M = \big((\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2) \ f(\boldsymbol{e}_3)\big) \ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \ = \ \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} \quad \square$$

［(1) 解法２］次の３つを満たす行列 M を求めることになる.

$$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad M\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad M\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

３つを並べる（行列の列結合）と

$$M\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

よって

$$M \ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

を計算すればよい. $\square$

［(2) 考え方］基底 $\mathcal{B}$ のベクトルに名前 $(\boldsymbol{b}_i)$ をつけて問題を書き直す.

$\boxed{\text{問}}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする. また, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.

このとき, $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であり, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である.

さらに線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

をみたす.　(2) f の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ.

〈定義の確認〉 3 次元線形空間 V の基底を $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, 2 次元線形空間 W の基底を $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とする. V から W への線形写像 $f : V \to W$ の 基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列とは

$$(\star) \qquad [f(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = N[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

となる 2×3 行列 N のことである. ここで

右辺の $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ は $\boldsymbol{x} \in V(= \mathbb{R}^3)$ の 基底 $\mathcal{A}$ に関する座標,
左辺の $[f(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}}$ は $f(\boldsymbol{x}) \in W(= \mathbb{R}^2)$ の 基底 $\mathcal{B}$ に関する座標.

さらに, 次のこと（座標）を確認しておく.
$V = \mathbb{R}^3$ で

$$\boldsymbol{a}_1 = 1\,\boldsymbol{a}_1 + 0\,\boldsymbol{a}_2 + 0\,\boldsymbol{a}_3 \text{ なので } \quad [\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2 = 0\,\boldsymbol{a}_1 + 1\,\boldsymbol{a}_2 + 0\,\boldsymbol{a}_3 \text{ なので } \quad [\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_3 = 0\,\boldsymbol{a}_1 + 0\,\boldsymbol{a}_2 + 1\,\boldsymbol{a}_3 \text{ なので } \quad [\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$W = \mathbb{R}^2$ で

$$\boldsymbol{b}_1 = 1\,\boldsymbol{b}_1 + 0\,\boldsymbol{b}_2 \text{ なので } \quad [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = 0\,\boldsymbol{b}_1 + 1\,\boldsymbol{b}_2 \text{ なので } \quad [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

そして, $f(\boldsymbol{a}_3) = x\,\boldsymbol{b}_1 + y\,\boldsymbol{b}_2$ つまり

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ を解いて } x = -4, y = -3. \text{ なので } \quad [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

— ここで行変形を利用する.

上の $(\star)$ 式で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とすれば, それぞれ

$$N[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{A}} = [f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}},\ \ N[\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{A}} = [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{B}}, \quad N[\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{A}} = [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}}$$

から

$$N\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad N\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \qquad N\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}.$$

３つを並べる（行列の列結合）と

$$N\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\end{bmatrix}. \qquad \text{よって } N = \underline{\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\end{bmatrix}} \quad \square$$

知識としては 次のように（求め方も含めて）まとめておくと良い

> n 次元線形空間 V の基底を $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$,
> m 次元線形空間 W の基底を $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ とする.
> V から W への線形写像 $f : V \to W$ の $\underline{\text{基底 } \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ に関する表現行列}}$ とは
>
> $$[f\,(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = N[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$
>
> となる $m \times n$ 行列 N のことである. $n \times m$ ではない（逆）ことに注意！
> N の求め方は
>
> $$N \ = \Big([f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}}\ [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}}\ \ldots\ [f(\boldsymbol{a}_n)]_{\mathcal{B}} \Big).$$

これを知っていれば, N の２列目まで（２次単位行列）は即答できる.

以上