

ある表現行列の問題の解説 2 (by 山田)

問 次をみたす線形変換 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について考える.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

また, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{E}$ を次の通りとする. ($\mathcal{E}$ は標準基底)

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

次の問いに答えよ.

- (1) 基底 $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ に関する f の表現行列を求めよ.
- (2) 基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列を求めよ.
- (3) 標準基底 $\mathcal{E}$ に関する f の表現行列を求めよ.

解説のためにベクトル, 行列の名称を決める: まず $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

解答 結論を先に書くと

$$(1) B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2) BA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

〈定義の確認〉 3次元線形空間 V の2組の基底を $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ とする.

V の線形変換 $f: V \rightarrow V$ の 基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列 とは

$$(\star) \quad [f(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \quad (\mathbf{x} \in V)$$

となる 3次正方行列 M のことである. ここで

右辺の $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ は $\mathbf{x} \in V$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標,

左辺の $[f(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}$ は $f(\mathbf{x}) \in V$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標,

さらに, 次のことを確認しておく.

$V = \mathbb{R}^3$ で, 標準基底 $\mathcal{E}$ に関する座標について $\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ は } \mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \text{ をみたすので } [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

また, 知識としては 次のように (求め方も含めて) まとめておくが良い

n 次元線形空間 V の基底を $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$,

m 次元線形空間 W の基底を $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)$ とする.

V から W への線形写像 $f: V \rightarrow W$ の 基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列 とは

$$[f(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = N[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \quad (\mathbf{x} \in V)$$

となる $m \times n$ 行列 N のことである. $n \times m$ ではない (逆) ことに注意!

N の求め方は

$$N = \begin{pmatrix} [f(\mathbf{a}_1)]_{\mathcal{B}} & [f(\mathbf{a}_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [f(\mathbf{a}_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

簡単なことだが, 次のことを確認しておく.

基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ について

$$\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 \text{ なので } [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 \text{ なので } [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_3 = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 \text{ なので } [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求める「基底 $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ に関する f の表現行列」を M とする.

問題で与えられた f の条件は

$$f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1 = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}}, \quad f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}, \quad f(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3 = [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{E}}$$

それぞれ, 次のことがわかる.

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この3者を並べる (行列の結合) と

$$M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{よって} \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

〈定義の確認〉

n 次元線形空間 V の2組の基底を $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ とする.
これらの間に

$$\mathbf{b}_1 = \alpha_{11} \mathbf{a}_1 + \alpha_{21} \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_{n1} \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_{12} \mathbf{a}_1 + \alpha_{22} \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_{n2} \mathbf{a}_n$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_n = \alpha_{1n} \mathbf{a}_1 + \alpha_{2n} \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_{nn} \mathbf{a}_n$$

の関係があるとき, 基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 とは, n 次正方行列

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

のこと (並び方の縦横に注意)

(2) 求める「基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列」を P とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= p_{11} \mathbf{a}_1 + p_{21} \mathbf{a}_2 + p_{31} \mathbf{a}_3 \\ \text{関係式 } \mathbf{e}_2 &= p_{12} \mathbf{a}_1 + p_{22} \mathbf{a}_2 + p_{32} \mathbf{a}_3 \quad (\text{の各 } p_{ij}) \text{ を求めて } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \text{ と} \\ \mathbf{e}_3 &= p_{13} \mathbf{a}_1 + p_{23} \mathbf{a}_2 + p_{33} \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

する.

成分で書いて、未知数 p_{ij} 9 個の連立方程式にする

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{32} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + p_{33} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(この問題の場合、数値が良いので答を見抜けるかも知れない.) この 3 つを いっぺんに解く方法がある. 3 つの式を並べて

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり} \quad AP = E$$

求める行列 P は, A の逆行列 A^{-1} である.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

(2) [別解] 求める「基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列」 P は「(逆向きの変換) 標準基底 $\mathcal{E}$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列 Q の逆行列」

Q は簡単

$$Q = ([\mathbf{a}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{E}} \quad [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{E}}) = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = A$$

そして $P = Q^{-1} = A^{-1}$.

□

(3) 求める「基底 $\mathcal{E}$ に関する f の表現行列」を N とする.

〈定義の確認〉 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像について, 標準基底に関する表現行列 とは

$$f(\boldsymbol{x}) = N\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

となる $m \times n$ 行列 N のことである. $n \times m$ 行列ではない (逆) ことに注意!

今の場合 $n = m = 3$ なので求める行列は 3 次正方行列であり,

$$N = (f(\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2) \ f(\boldsymbol{e}_3))$$

と成分を並べて求めることができる. (理由: 例えば $f(\boldsymbol{e}_1) = N\boldsymbol{e}_1$ は N の第 1 列である)

与えられているのは $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$ だが, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めたい. そのために $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ のそれぞれを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表す. これは (2) で求めている.

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{e}_1 = & \boldsymbol{a}_1 & -\boldsymbol{a}_2 & f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 = & & \boldsymbol{a}_2 & -\boldsymbol{a}_3 \quad \text{よって} \quad f(\boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = & & & \boldsymbol{a}_3 \quad f(\boldsymbol{e}_3) = f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3 \end{array}$$

成分を書くと

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって

$$N = (f(\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2) \ f(\boldsymbol{e}_3)) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

行列の計算を重視して解くには

$$\begin{aligned} N &= (f(\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2) \ f(\boldsymbol{e}_3)) \\ &= (\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 \quad \boldsymbol{b}_3) \\ &= (\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \boldsymbol{b}_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = BA^{-1} \end{aligned}$$

□