ホモロジー（by 山田）

形の情報を代数で引き出す.

K を（2 次元以下の）複体とする.

(1) 単体の向き.

1 単体の場合：$l = AB$ とする. AB と BA は単体として同じもの（辺 AB）を表わすが, ホモロジー論では　「単体としては同じだが, 向きが異なっている」　と考え, $BA = -AB$　と扱う. ホモロジーの計算では, 各単体の “向き込みの名称” を先に決めておくと良い. 例えば BA が現れたらすぐ $-AB$ に直して常に AB で扱う, というように.

2 単体の場合：$\Delta = ABC$ とする.

$$ABC, \quad BCA, \quad CAB, \quad CBA, \quad ACB, \quad BAC$$

は単体としては同じものを表わす. Δ を片面からみたとき, 前の 3 者 ABC, BCA, CAB は 3 つの頂点を “同じ回り順に読み上げて” いるが, 後の 3 者 CBA, ACB, BAC はそれが逆順である. このことをやはり「向きの違い」と考え, ホモロジー論では

$$\begin{cases} \quad ABC = \quad BCA = \quad CAB \\ = -CBA = -ACB = -BAC \end{cases}$$

と扱う. ホモロジーの計算では, 各単体の “向き込みの名称” を先に決めておくと良い.

(2) 係数環 R.　　通常は 次の 4 つのうちのどれかが用いられることが多い.

$$\mathbf{Z}\text{（整数の集合）}, \quad \mathbf{Q}\text{（有理数の集合）}, \quad \mathbf{R}\text{（実数の集合）}, \quad \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

ホモロジーは, 実は ある方程式の解の集合の商集合 なのだが, 次のような観点で係数の違いが重要な役割を果たすのである.

$R = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ のぞれぞれの場合に

方程式　$4x = 2a$　すなわち*　$x + x + x + x = a + a$

の解はどうなるか？ 解は次のようになる.

$R = \mathbf{Z}$ の場合　　a が奇数のとき x の解なし, a が偶数のとき $x = a/2$.
$R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ の場合　$x = a/2$.
$R = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の場合　任意の a に対して x の解は任意のスカラー.

*加群としての係数の作用：$4x$ は “4 かける x” と解釈せず, “4 回 x を足したもの” と解釈すること.

以下，複体 K と 係数 R を固定して記述する．

(3) **チェイン** と **境界作用素**.

n 次のチェイン　$C_n(K;R)$　とは

$$C_n(K;R) := \left\{ \sum_{\sigma:n\text{-単体}} a_\sigma \sigma \;\middle|\; a_\sigma \in R \right\}$$

ただし $n < 0$ と $n >$ (K の次元) の場合は　$C_n(K;R) = \{0\}$　と定める．

n 次のチェインからの境界作用素　$\partial_n : C_n(K;R) \to C_{n-1}(K;R)$　とは

$$\partial_n(A_0A_1\cdots A_n) \quad := \quad \sum_{j=0}^{n}(-1)^j A_0A_1\cdots\hat{A}_j\cdots A_n$$

（ここで $\hat{X}$ とは「X を取り除く」意味とする.）を線形に拡張した写像とする．つまり

$$\partial_n\left(\sum a_\sigma\sigma\right) \quad := \quad \sum a_\sigma\,\partial\sigma.$$

境界作用素の重要な性質：　$\partial_n \circ \partial_{n+1} = O$.　“2 回施すとゼロ”.

(4) **サイクル**.　n 次のサイクル　$Z_n(K;R)$　とは　$\mathrm{Ker}(\partial_n)$　のこと

$$Z_n(K;R) := \{x \in C_n(K;R) \mid \partial_n x = 0\}$$

n 次サイクル $Z_n(K;R)$ は n 次チェイン $C_n(K;R)$ の部分加群であることに注意.

(5) **バウンダリ**.　n 次のバウンダリ　$B_n(K;R)$　とは　$\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$　のこと

$$B_n(K;R) := \{\partial_{n+1}\,x \mid x \in C_{n+1}(K;R)\}$$

n 次バウンダリ $B_n(K;R)$ は n 次チェイン $C_n(K;R)$ の部分加群であることに注意.

さらに，公式 $\partial_n \circ \partial_{n+1} = O$ により，n 次バウンダリ $B_n(K;R)$ は n 次サイクル $Z_n(K;R)$ の部分加群でもある：

$$C_n(K;R) \quad \supset \quad Z_n(K;R) \quad \supset \quad B_n(K;R)$$

(6) **ホモロジー**.　n 次のホモロジー　$H_n(K;R)$　とは

n 次サイクル $Z_n(K;R)$ の n 次バウンダリ $B_n(K;R)$ による商加群のこと

$$H_n(K;R) \quad := \quad Z_n(K;R)\big/B_n(K;R) \quad = \quad Z_n(K;R)\big/\sim$$

$$(\ z \sim z' \quad \text{in } Z_n(K;R) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z - z' \in B_n(K;R)\ )$$