

加群 (Module) (by 山田)

係数の商演算を仮定しない線形空間

加群の定義は既にプリント「群・環・体 など」で述べた:
“定義” R を環 (例えば $\mathbf{Z}$) とする. 集合 M が R -加群である とは

(1) M には 和 が定義されている:

$$m_1, m_2 \in M \Rightarrow m_1 + m_2 \in M.$$

(2) M には スカラー倍 が定義されている:

$$r \in R, m \in M \Rightarrow rm \in M.$$

そして, この2種類の演算についていくつかの“当然の”条件 (分配法則など) が成り立つこと.

R が体 (例えば $\mathbf{R}, \mathbf{C}$) の場合は, M が R -加群であることは, M が R 上の線形空間であることに他ならない. 「(n 個の元が) 一次独立», 「(同) M を生成する», 「 M の部分加群», 「線形写像」などの概念は線形代数と全く同じ記述で定義される.

例. $\mathbf{Z}$ 自身, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (n は自然数) はいずれも $\mathbf{Z}$ -加群である.

定義 M_1, M_2 が共に R -加群であるとき, 新たな R -加群「 M_1 と M_2 の直和 (記号: $M_1 \oplus M_2$)」を次のように定義する.

$$M_1 \oplus M_2 := \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

とし, 和とスカラー倍は次のように定義 (ベクトルと同じ)

$$\begin{aligned} \text{和: } & (m_1, m_2) + (m'_1, m'_2) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2). \\ \text{スカラー倍: } & r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2) \end{aligned}$$

よって, $\mathbf{Z}$ や $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 達のいくつかの直和は $\mathbf{Z}$ -加群である

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n_2\mathbf{Z} \cdots \oplus \mathbf{Z}/n_K\mathbf{Z},$$

事実: 実は $\mathbf{Z}$ -加群は必ず上のようなものに同形である.

注意: $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ (左辺の $(1, 1)$ が右辺の 1 に対応).

さらに n と m が互いに素ならば,

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/nm\mathbf{Z}.$$

一方, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \not\cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ($2x = 0$ の解の個数が違う).

定義 R -加群 M が自由加群であるとは、 M の 1 次独立な生成系が存在すること。このとき M と $R \oplus R \oplus \cdots R$ の間に全単射の R -線形写像が存在する。このとき、生成系の元の個数 (R の個数) を M の rank という (なぜか次元とは言わない)。自由加群の生成系を 基底 という。

定義 R -加群 M の元 m が「ある $r \neq 0$ に対して $rm = 0$ 」をみたすとき、 m を M の ねじれ元 という。 M のねじれ元に生成される M の部分加群を $\text{Tor}(M)$ とあらわして M の ねじれ部分 という。

定理 R -加群 M とその R -部分加群 N に対して、商集合 M/N を考える。

$$m \equiv m' \iff m - m' \in N$$

M の元 m (代表元) によって M/N の元を表わすとき $[m]$ と記す。 M/N は自然に R -加群 となる。 M の N による剰余加群 と呼ばれる。

$$\begin{aligned} m_1 \equiv m'_1 \text{ かつ } m_2 \equiv m'_2 \text{ ならば } m_1 + m_2 \equiv m'_1 + m'_2 & \quad \text{in } M, \text{ あるいは} \\ [m_1] = [m'_1] \text{ かつ } [m_2] = [m'_2] \text{ ならば } [m_1 + m_2] = [m'_1 + m'_2] & \quad \text{in } M/N. \end{aligned}$$

例. $M = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $N := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ のとき M/N はどんな $\mathbf{Z}$ -加群か?

考察: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin N$. 実数で計算すると $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. また $4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in N$.

$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ が M の基底となることから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv (x - 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって $M/N \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ となる。生成元として $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ 。

M/N を求めるための一般的な方針は：

- (1) N の生成元から、もし n 倍元があれば n で割ったものに取り替えつつ、できるだけ一次独立なものを準備。
- (2) それに M の元をいくつか加えて、 M の生成系をうまく取る。